пересекающихся в точке A_0, и единственной собственной точки

$$\mathcal{F} = \left(2+\tfrac{1}{4}(c_1)^2+\tfrac{1}{4}(c_2)^2\right)A_0 + c_1 A_1 + 2A_3. \qquad (2.10)$$

Совмещая ребро A_0A_3 с прямой $A_0\mathcal{F}$ и выбирая A_1 в точке пересечения касательных плоскостей к абсолюту Q_0 в A_0 и A_3 и к орисфере S в точке $\mathcal{F}$, построим канонический репер конгруэнции орисфер. В этом репере фокальная точка $\mathcal{F}$ является единичной точкой ребра A_0A_3.

Библиографический список

1. Е ф и м о в Н.В. Высшая геометрия/ М.: ГИТТЛ, 1953.

2. А р т е м о в а И.Н. Конгруэнции орисфер в пространстве Лобачевского//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1986. Вып. 17. С. 9-10.

УДК 514.75

НОРМАЛИЗАЦИЯ ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА, ПОРОЖДЕННЫЕ СЕМЕЙСТВОМ КОЛЛИНЕАЦИЙ

Н.В. М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)

Продолжается, начатое в [1], исследование n-параметрических семейств Π_n коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to P_n$ n-мерных проективных пространств, отображающих заданную точку $P^\circ \in \mathcal{P}_n$ в заданную точку $p^\circ \in P_n$. Доказано, что поле фундаментального объекта второго порядка семейства Π_n определяет пучок инвариантных нормализаций каждого из пространств $\mathcal{P}_n$, P_n. Получена геометрическая характеристика гиперплоскостей, осуществляющих эти нормализации. Каждой характеристической прямой ассоциированного точечного отображения $\varphi: \mathcal{P}_n \to P_n$ семейство Π_n ставит в соответствие единственное число $\sigma \in \mathbb{R}$ (характеристическое число). В работе использованы обозначения и формулы из [1].

§1. Пучок нормализаций, порожденный семейством коллинеаций Π_n.

Продолженная система уравнений Пфаффа семейства коллинеаций Π_n имеет вид ([1], (1.6)-(1.9)):

$$\begin{cases} \omega^i = \lambda^i_j \Omega^j, \quad \nabla M^i_j = M^i_{jk}\Omega^k, \quad \nabla P_j + \Omega^0_j - M^k_j \omega^0_k = P_{jk}\Omega^k, \\ \nabla \lambda^i_j = \lambda^i_{jk}\Omega^k, \quad \Delta M^i_{jk} = M^i_{jkl}\Omega^l, \quad \Delta \lambda^i_{jk} = \lambda^i_{jkl}\Omega^l, \\ \Delta P_{jk} = P_{jkl}\Omega^l, \quad \Delta M^i_{jkl} = M^i_{jklh}\Omega^h, \quad \Delta P_{jkl} = P_{jklh}\Omega^h. \end{cases} \qquad (1.1)$$

Учитывая, что $\det(\lambda^i_j) \neq 0$, $\det(M^i_j) \neq 0$, $\det(\tilde{\lambda}^i_j) \neq 0$ $(\tilde{\lambda}^i_j = M^i_j - \lambda^i_j)$, рассмотрим системы величин

$$\Gamma^l_{jk} = \overset{*}{\lambda}{}^l_i \lambda^i_{jk}, \quad G^l_{jk} = \overset{*}{M}{}^l_i M^i_{jk}, \qquad (1.2)$$

$$\Gamma_j = \Gamma^k_{kj}, \quad G_j = G^k_{kj}, \qquad (1.3)$$

$$\nu_i = \overset{*}{\tilde{\lambda}}{}^j_i \left(P_j - \tfrac{1}{n+1}\Gamma_j\right), \qquad (1.4)$$

$$N_i = \overset{*}{\tilde{\lambda}}{}^j_i \left(P_j - \tfrac{1}{n+1} G_j\right), \qquad (1.5)$$

где $\overset{*}{\lambda}{}^l_i$, $\overset{*}{M}{}^l_i$, $\overset{*}{\tilde{\lambda}}{}^j_i$ взаимные тензоры соответственно к тензорам λ^i_j, M^i_j, $\tilde{\lambda}^i_j$. Имеем:

$$\nabla \Gamma^l_{jk} = -\delta^l_{(j}\Omega^0_{k)} + \delta^l_{(j}\lambda^i_{k)}\omega^0_i + \Gamma^l_{jkh}\Omega^h, \qquad (1.6)$$

$$\nabla G^l_{jk} = -\delta^l_{(j}\Omega^0_{k)} + \delta^l_{(j}\lambda^i_{k)}\omega^0_i + G^l_{jkh}\Omega^h, \qquad (1.7)$$

$$\nabla \Gamma_j = (n+1)(\lambda^i_j \omega^0_i - \Omega^0_j) + \Gamma_{jk}\Omega^k, \qquad (1.8)$$

$$\nabla G_j = (n+1)(\lambda^i_j \omega^0_i - \Omega^0_j) + G_{jk}\Omega^k, \qquad (1.9)$$

$$\nabla \nu_i = \omega^0_i + \nu_{ik}\Omega^k, \qquad (1.10)$$

$$\nabla N_i = \omega^0_i + N_{ik}\Omega^k. \qquad (1.11)$$

Следовательно, системы величин $\{\nu_i\}$ и $\{N_i\}$ являются квазитензорами. Каждый из них определяет для данной точки $p^\circ \in P_n$ инвариантную гиперплоскость в P_n, не инцидентную точке p°:

$$\nu_i x^i + 1 = 0, \qquad (1.12)$$

$$N_i x^i + 1 = 0, \qquad (1.13)$$

то есть нормализацию проективного пространства P_n, порожденную семейством Π_n коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to P_n$. В общем случае нормали (1.12), (1.13) определяют для каждой точки p° пучок инвариантных нормалей

$$(\nu_i + \sigma(N_i - \nu_i))x^i + 1 = 0, \qquad (1.14)$$

где $\sigma \in \mathbb{R}$. Гиперплоскости в $\mathcal{P}_n$, являющиеся прообразами нормалей (1.12), (1.13) при коллинеации π, определяются уравнениями

$$(\nu_i M^i_j - P_j)X^j + 1 = 0, \qquad (1.15)$$

$$(N_i M^i_j - P_j)X^j + 1 = 0, \qquad (1.16)$$

которые подобно (1.14) определяют в $\mathcal{P}_n$ пучок инвариантных нормалей для точки P°. Получаем

П р е д л о ж е н и е 1.1. Поле фундаментального объекта второго порядка семейства Π_n коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to P_n$

определяет пучок инвариантных нормализаций каждого из пространств $\mathcal{P}_n$ и p_n.

Построенные нормализации позволяют провести частичную канонизацию реперов R и r пространств $\mathcal{P}_n$ и p_n. В однородных координатах $\tilde{x}^0$, $\tilde{x}^i = x^i\tilde{x}^0$, уравнение (I.14) нормали $\nu(\sigma)$ запишется в виде:

$$(\nu_i + \sigma(N_i - \nu_i))\tilde{x}^i + \tilde{x}^0 = 0. \qquad (1.17)$$

Поместим вершины a_i репера r на нормаль $\nu_{(\sigma)}$, где σ фиксировано. Уравнение (I.17) принимает вид

$$\tilde{x}^0 = 0, \qquad (I.18)$$

причем

$$\nu_i + \sigma(N_i - \nu_i) = 0, \qquad (I.19)$$

а формы Пфаффа ω^0_i с помощью соотношений (I.10),(I.11),(I.19) выразятся линейно через Ω^J. Канонизированный таким образом репер пространства p_n обозначим r_σ. В частных случаях, при $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$ вершины a_i репера r_σ определяют соответственно нормали (I.12), (I.13). Аналогичным образом можно провести частичную канонизацию репера R пространства $\mathcal{P}_n$.

§2. Геометрическая характеристика нормалей.

Обозначим символом K_0 локальную коллинеацию [2] точечного отображения φ в точке P^0. В общем случае отображения $S = \pi^{-1} \circ K_0$ и $S = K_0 \circ \pi^{-1}$ являются невырожденными проективными преобразованиями соответственно пространств $\mathcal{P}_n$ и p_n, причем точки P^0 и p_0 являются их неподвижными точками. Пусть S^* и s^* проективные преобразования пространств $\mathcal{P}^*_n$ и p^*_n, двойственных к $\mathcal{P}_n$ и p_n, т.е. преобразования, сопряженные к S и s.

П р е д л о ж е н и е 2.1. Нормаль $\nu(0)$ является неподвижным элементом преобразования s^*, сопряженного к преобразованию $s = K_0 \circ \pi^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В репере r_0 имеем $\nu_i = 0$, из (I.4) находим

$$P_J = \frac{1}{n+1}\Gamma_J. \qquad (2.1)$$

Локальная коллинеация K_0 отображения φ определяется формулой (2.13)[I], где $Q_K = \frac{1}{n+1}\Gamma_K$. Для $\pi^{-1}(\nu_{(0)})$ и $K_0^{-1}(\nu_{(0)})$ получаем соответственно

$$P_J X^J - 1 = 0, \qquad (2.2)$$

$$\Gamma_J X^J - (n+1) = 0, \qquad (2.3)$$

откуда вытекает утверждение теоремы.

Следующие два предложения являются следствиями предложения 2.1.

П р е д л о ж е н и е 2.2. Полные прообразы множества точек нормали $\nu_{(0)}$ при отображениях π и K_0 совпадают.

П р е д л о ж е н и е 2.3. Нормаль $\pi^{-1}(\nu_{(0)})$ пространства $\mathcal{P}_n$ в точке P^0 является неподвижным элементом преобразования S^*, сопряженного к преобразованию $S = \pi^{-1} \circ K_0$ пространства $\mathcal{P}_n$.

Каждое из предложений 2.1 – 2.3 в общем случае дает полную геометрическую характеристику нормали $\nu_{(0)}$. Для геометрической характеристики нормали $\nu_{(1)}$ рассмотрим в $\mathcal{P}_n$ поле аффинора $\{A^J_K\}$ ([I]c. 54). Покажем, что для каждой точки $P^0 \in \mathcal{P}_n$ полем $\{A^J_K\}$ однозначно определяется коллинеация $\varkappa$ пространства $\mathcal{P}_n$. Потребуем, чтобы преобразование $\varkappa$ имело в точке P^0 касание первого порядка с тождественным преобразованием $\mathrm{Id}\,\mathcal{P}_n$. Тогда $\varkappa$ запишется в виде

$$y^J = \frac{X^J}{1 - \varkappa_K X^K}. \qquad (2.4)$$

Из (2.4) получаем

$$\overset{\circ}{\nabla}\varkappa_K = 0, \qquad (2.5)$$

где $\overset{\circ}{\nabla}$ обозначает оператор, соответствующий оператору ∇ [1] при фиксации первичных параметров. Для якобиана $\mathcal{J}(\varkappa)$ отображения $\varkappa$ получаем:

$$\det \ln \mathcal{J}(\varkappa) = (n+1)\varkappa_J \Omega^J. \qquad (2.6)$$

Наложим на отображение $\varkappa$ условие равенства значений форм (2.6) и (3.5) [1] в точке P^0:

$$d \ln \mathcal{J}(\varkappa) = d \ln \det (A^J_K). \qquad (2.7)$$

Геометрически это условие означает, что в любой системе координат точка P^0 является стационарной точкой числовой функции

$$\rho = \frac{\mathcal{J}(\varkappa)}{\det(A^J_K)}. \qquad (2.8)$$

Формула (2.7) приводит к равенству тензоров

$$\varkappa_J = \frac{1}{n+1} M_J, \qquad (2.9)$$

где M_J задано соотношением (2.5) [1]. Таким образом, преобразование $\varkappa$:

$$y^J = \frac{X^J}{1 - \frac{1}{n+1} M_K X^K} \qquad (2.10)$$

является единственной коллинеацией $\mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, имеющей в точке P^0 касание первого порядка с отображением $\mathrm{Id}\,\mathcal{P}_n$, для которой точка P^0 является стационарной точкой функции (2.8) в каждой системе координат. Сравнивая (I.2),(I.3) с формулой (2.5)[1], находим

$$M_J = G_J - \Gamma_J. \qquad (2.11)$$

Для локальной коллинеации $\mathcal{L}$ отображения $\varphi \circ \varkappa$

$$x^i = \frac{\Lambda^i_j X^j}{1 - R_k X^k} \tag{2.12}$$

получаем

$$R_j = \frac{1}{n+1}(\Gamma_j + M_j) \tag{2.13}$$

или с учетом (2.II):

$$R_j \doteq \frac{1}{n+1} G_j . \tag{2.14}$$

Сравнивая (2.I4),(2.I) с (I.8),(I.9) и проводя рассуждения, аналогичные доказательству предложения 2.I, получаем следующие предложения:

П р е д л о ж е н и е 2.4. Нормаль $\nu_{(1)}$ является неподвижным элементом преобразования t^*, сопряженного к преобразованию $t = \mathcal{L} \circ \pi^{-1}$: $P_n \to P_n$, где $\mathcal{L}$ -локальная коллинеация отображения $\varphi \circ \pi$.

П р е д л о ж е н и е 2.5. Полные прообразы $\pi^{-1}(\nu_{(1)})$ и $\mathcal{L}^{-1}(\nu_{(1)})$ множества точек нормали $\nu_{(1)}$ при отображениях π и $\mathcal{L}$ совпадают.

Таким образом, получена геометрическая характеристика нормалей $\nu_{(0)}$ и $\nu_{(1)}$ пучка нормалей $\nu_{(\sigma)}$, базисными нормалями которого являются гиперплоскости $\nu_{(0)}, \nu_{(1)}$ и гиперплоскость $\nu_{(\infty)}$:

$$(M_i - \nu_i) x^i = 0 , \tag{2.15}$$

проходящая через точку p^0 и (n-2)-плоскость $\nu_{(0)} \cap \nu_{(1)}$. Тем самым геометрически охарактеризована каждая нормаль $\nu_{(\sigma)}$ пучка (I.I4), а также все нормали $\pi^{-1}(\nu_{(\sigma)})$ в $\mathcal{P}_n$.

Между гиперплоскостью $\nu_{(\infty)} \subset P_n$ и гиперплоскостью $M \subset \mathcal{P}_n$, задаваемой уравнением (3.4)[I]и охарактеризованной в предложении 3 [I], имеется следующая связь. Пусть $d\varphi : T_{P^0}(\mathcal{P}_n) \to T_{p^0}(P_n)$, $d\pi : T_{P^0}(\mathcal{P}_n) \to T_{p^0}(P_n)$ дифференциалы отображений φ и π. Они определяются соответственно формулами

$$\omega^i = \lambda^i_j \Omega^j, \quad \omega^i = M^i_j \Omega^j. \tag{2.16}$$

Обозначим символами $T(\nu_{(\infty)})$ и $T(M)$ соответственно (n-I)-мерные подпространства в $T_{p^0}(P_n)$ и $T_{P^0}(\mathcal{P}_n)$, определяющие гиперплоскости $\nu_{(\infty)} \subset P_n$ и $M \subset \mathcal{P}_n$.

П р е д л о ж е н и е 2.6. Пусть линейное отображение $\alpha : T_{P^0}(\mathcal{P}_n) \to T_{p^0}(P_n)$ определяется равенством

$$d\pi = d\varphi + \alpha , \tag{2.17}$$

тогда

$$\alpha(T(M)) = T(\nu_{(\infty)}). \tag{2.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображение α задается матрицей $(\tilde{\lambda}^i_j)$. Утверждение теоремы непосредственно вытекает из (I.8),(I.9) и (3.4) [I].

§3. φ_σ-главные точки. Характеристические прямые и характеристические числа.

Если репер пространства P_n является репером r_σ, то для каждой точки $P^0 \in \mathcal{P}_n$ система уравнений

$$\lambda^i_{jk} X^j X^k - 2\lambda^i_j X^j = 0 \tag{3.1}$$

определяет инвариантное многообразие $\mathcal{J}_\sigma \subset \mathcal{P}_n$. Многообразие $\mathcal{J}_\sigma$ содержит точку P^0 и в общем случае является нульмерным алгебраическим многообразием порядка 2^n, т.е. состоит из 2^n точек, одна из которых совпадает с точкой P^0. В специальных случаях размерность многообразия $\mathcal{J}_\sigma$ может повышаться. Будем называть многообразие $\mathcal{J}_\sigma$ φ_σ-индикатрисой.

О п р е д е л е н и е 3.1. Пусть $K(Q_j)$ -связка коллинеаций, касательных к отображению φ в точке P^0. Точка $B \in \mathcal{P}_n$, $B \neq P^0$ называется φ_σ-главной точкой относительно точки P^0, если прямая $[P^0B]$ является $K(Q_j)$-главной прямой отображения φ и точка $K(Q_j)(B)$ лежит в гиперплоскости $\nu_{(\sigma)} \subset P_n$.

Из этого определения следует, что понятие φ_σ-главных точек является обобщением понятия главных точек [3] отображения $f: P_m \to \hat{P}_n$, где $\hat{P}_n$ расширенное аффинное пространство, и совпадает с последним в специальном случае, когда все нормали $\nu_{(\sigma)}$ совпадают друг с другом и одинаковы для всех точек пространства. Отсюда вытекает геометрическая интерпретация φ_σ-индикатрисы $\mathcal{J}_\sigma$ как обобщения индикатрисы $\mathcal{J}$ [3] отображения f и ее связь с множеством χ_φ характеристических прямых отображения φ.

П р е д л о ж е н и е 3.1. φ_σ-индикатриса $\mathcal{J}_\sigma$ является объединением множества φ_σ-главных точек и множества, состоящего из точки P^0.

П р е д л о ж е н и е 3.2. Множество χ_φ характеристических прямых отображения φ состоит из прямых вида $[P^0B]$, где $B \in \mathcal{J}_\sigma$, $B \neq P^0$.

Легко показать, что χ_φ не меняется при изменении σ.

О п р е д е л е н и е 3.2. Пусть Λ -характеристическая прямая отображения φ и B – φ_σ-главная точка на ней. Число σ называется характеристическим числом соответствующей прямой Λ, если $\pi(B) \in \nu_{(\sigma)}$.

Так как сужение на Λ всех касательных к φ в точке P^0 коллинеаций $K(Q_j)$, для которых прямая Λ является $K(Q_j)$-главной, совпадают [4], справедливо

П р е д л о ж е н и е 3.3. Семейством Π_n коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to P_n$ определяется во второй дифференциальной окрестности пары (P^0, p^0) на множестве χ_φ характеристических прямых точечного отображения $\varphi: \mathcal{P}_n \to P_n$ числовая функция, которая каждой характеристической прямой Λ ставит в соответствие единственное характеристическое число σ.

Библиографический список

1. Малаховский Н.В. О семействах коллинеаций многомерных проективных пространств//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, 1989.Вып. 20.С.50-57.

2. Чех Э. Проективно-дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами. I//Чехосл.матем.ж.1952.Т .2.№1.С.91-107.

3. Андреев Б.А. К геометрии дифференцируемого отображения $f: P_m \to \hat{P}_n$ $(m>n)$ //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, 1987.Вып.18.С.5.

4. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами//Геометрия 1963.Итоги науки/ВИНИТИ.М., 1965. С.65-107.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ И СУПЕРКОНГРУЭНЦИИ m-ПЛОСКОСТЕЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО n-ПРОСТРАНСТВА

А.Ф.Масагутова

(Московский государственный педагогический институт)

В работе изучаются некоторые семейства m-мерных плоскостей эллиптического пространства S_n: конгруэнции и суперконгруэнции m-плоскостей, строятся канонические реперы.

1. Конгруэнцией m-плоскостей пространства S_n называется семейство m-плоскостей, зависящее от $n-m$ вещественных параметров. В общем случае m-плоскости конгруэнции заполняют все пространство S_n, причем через каждую точку некоторой области этого пространства проходит единственная m-плоскость конгруэнции. Те точки пространства S_n, в которых нарушается единственность прохождения m-плоскости конгруэнции, называются фокусами m-плоскостей конгруэнции. Теория конгруэнций m-плоскостей пространства S_n изучалась тензорным методом В.В.Вагнером [1], Б.А.Розенфельдом [2].

На грассманиане $\Gamma \rho^{s}_{n,m}$ $(m+1)(n-m)$-поверхности в пространстве S_N, где $N=\binom{n+1}{m+1}-1$, координатами точек которой являются грассмановы координаты $p^{i_0 \dots i_m}$ плоскостей пространства S_n, конгруэнция m-плоскостей пространства S_n изображается $(n-m)$-поверхностью. Если обозначить касательные векторы к грассманиане $d\vec{p} = \omega^{au}\vec{e}_{au}$ $(a, b = 0, 1, \dots, m$; $u, v = m+1, m+2, \dots, n)$, то для векторов, касательных к этой $(n-m)$-поверхности, строки матрицы (ω^{au}) линейно зависят друг от друга $\omega^{au} = c^{au}_{ov}\omega^{ov}$.

Если за базисную точку X_0 m-плоскости принять точку этой $(n-m)$-поверхности, то дифференциальные формы ω^u можно рассматривать как дифференциальные формы $(n-m)$ – поверхности и уравнения Пфаффа этой $(n-m)$-поверхности можно записать в виде $\omega^a = 0$. Дифференцируя эти уравнения внешним образом, мы получим $\omega^a_u \wedge \omega^u = 0$ и в силу леммы Картана $\omega^a_u = b^a_{uv}\omega^v$, где

$$b^a_{uv} = b^a_{vu} \tag{I}$$

Если мы отождествим формы ω^{au} с формами ω^v, получим, что в этом случае $c^{au}_{ov} = b^a_{uv}$, т.е. в силу (I): $c^{au}_{ov} = c^{av}_{ou}$

Конгруэнции m-плоскостей пространства S_n являются частным случаем конгруэнций m-поверхностей этого пространства, т.е. семейств m-поверхностей, зависящих от $(n-m)$ вещественных параметров и обладающих тем свойством, что через каждую точку некоторой области пространства проходит единственная m-поверхность семейства.

Если мы обозначим уравнения m-поверхности конгруэнции $f^u = f^u(x^0, x^1, \dots, x^n; u^{m+1}, u^{m+2}, \dots, u^n)$, то фокусы этой конгруэнции удовлетворяют условиям

$$\frac{\mathcal{D}(f^{m+1}, f^{m+2}, \dots, f^n)}{\mathcal{D}(u^{m+1}, u^{m+2}, \dots, u^n)} = 0. \tag{2}$$

Поэтому в случае конгруэнции m-плоскостей фокусы, находящиеся на одной m-плоскости конгруэнции, образуют алгебраическую $(m-1)$-поверхность $(n-m)$-го порядка, определяемую уравнением (2). В частности, в случае $m=1$, т.е. конгруэнции прямых, на каждой прямой конгруэнции имеется $n-1$ фокусов. Поэтому имеет место

Теорема 1. В случае конгруэнции прямых пространства S_n с каждой прямой конгруэнции можно связать канонический репер первого порядка.

В этом случае сегреана [3] $\Sigma^{s}_{m,n-m-1}$ в бесконечно удаленной гиперплоскости касательного пространства $E_{(m+1)(n-m)}$ к грассманиане $\Gamma\rho^{s}_{n,m}$ является сегреаной $\Sigma^{s}_{1,n-2}$, представляющей собой алгебраическую поверхность, размерность и порядок которой равны $n-1$. Поэтому бесконечно удаленная $(n-2)$-плоскость $(n-1)$-плоскости пространства E_{2n-2}, касательной к $(n-1)$-поверхности, изображает конгруэнцию прямых на грассманиане $\Gamma\rho^{s}_{n,1}$, пересекающуюся с сегреаной $\Sigma^{s}_{1,n-1}$ в $n-1$ точках, каждая из которых определяет пучок прямых, проходящих через прямую конгруэнции. 2-плоскости этих пучков определяют на по-

8 Зак. 1209