УДК 514.76

А. Я. Султанов

(*Пензенский государственный педагогический университет*)

О ВЕЩЕСТВЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ГОЛОМОРФНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ НАД АЛГЕБРОЙ

Доказано, что вещественная реализация голоморфной линейной связности ∇ является локально проективно плоской тогда и только тогда, когда связность ∇ — локально плоская.

Пусть A — коммутативная, ассоциативная алгебра конечного ранга m с единицей над полем действительных чисел R, M_n — A-гладкое многообразие размерности n над алгеброй A, M^R_{mn} — многообразие, полученное из M_n путем овеществления. Вещественной реализацией связности ∇, заданной на M_n, называется линейная связность ∇^R на многообразии M^R_{mn}, удовлетворяющая условию

$$\nabla^R_{X^{(a)}} Y^{(b)} = (\nabla_X Y)^{(ab)}$$

для произвольных векторных полей X, Y на M_n и произвольных элементов a и b алгебры A. Векторное поле $X^{(a)}$ — (a)-вещественная реализация векторного поля X, которая определяется условием

$$X^{(a)} F_{(b*)} = (XF)_{(b*a)}$$

для каждой голоморфной функции F.

Линейная связность называется локально проективно плоской, если ее тензорное поле Вейля равно нулю (W=0) и тензорное поле кручения T также равно нулю.

Пусть $p \in M_{mn}^R, (U, x^i)$ — координатная окрестность такая, что $p \in U, (U, x_\alpha^i)$ — координатная окрестность на M_{mn}^R, (∂_i) — поле *A*-натурального репера, (∂_i^α) $(\alpha = 1, 2 \ldots, m)$ — поле натурального репера над *R* в окрестности *U*.

В алгебре *A* выберем базис (ε^α) и положим

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = (\Gamma_{\nu ij}^k \varepsilon^\nu) \partial_k, \ \nabla_{\partial_i^\alpha}^R \partial_j^\beta = \Gamma_{ij\sigma}^{\alpha\beta k} \partial_k^\sigma.$$

Тогда

$$\Gamma_{ij\sigma}^{\alpha\beta k} = \Gamma_{\nu ij}^k \gamma_\sigma^{\nu\alpha\beta},$$

где $\gamma_\sigma^{\nu\alpha\beta} = \gamma_\tau^{\nu\alpha} \gamma_\sigma^{\tau\beta}$, а $\gamma_\tau^{\nu\alpha}$ — структурные постоянные алгебры *A*.

Если *R* — тензорное поле кривизны, то тензорным полем кривизны $R^{(\delta)}$ будет (δ) — реализация тензорного поля *R*, где δ — главная единица алгебры *A*.

Условие *W=0* равносильно выполнимости следующих соотношений:

$$R_{ijk\sigma}^{\alpha\beta\gamma h} = \frac{1}{mn+1} \delta_i^h \delta_\sigma^\alpha (R_{kj}^{\gamma\beta} - R_{jk}^{\beta\gamma}) + \\ + \frac{1}{(mn)^2 - 1} \left[(mnR_{ij}^{\alpha\beta} + R_{ji}^{\beta\alpha}) \delta_k^h \delta_\sigma^\gamma - (mnR_{ik}^{\alpha\gamma} + R_{ki}^{\gamma\alpha}) \delta_j^h \delta_\sigma^\beta \right] \quad (1)$$

Составляющие $R_{ijk\sigma}^{\alpha\beta\gamma h}$ тензора $R^{(\delta)}$ представляют собой коэффициенты разложения

$$R^{(\delta)}(\partial_i^\alpha, \partial_j^\beta) \partial_k^\gamma = R_{ijk\sigma}^{\alpha\beta\gamma h} \partial_h^\sigma.$$

Эти равенства иначе можно представить следующим образом:

$$(R(\partial_i, \partial_j) \partial_k)^{(\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta \varepsilon^\gamma)} = R_{ijk\sigma}^{\alpha\beta\gamma h} \partial_h^\sigma. \quad (2)$$

Поэтому левые части соотношений (1) инвариантны относительно любой перестановки индексов α, β, γ.

В соотношениях (1) $R_{ij}^{\alpha\beta}$ являются компонентами тензора Риччи. Заметим, что выполняются следующие условия:

$$R_{ij}^{\alpha\beta} = R_{ij}^{\beta\alpha}. \tag{3}$$

Действительно, из равенств (2) следуют равенства

$$(R_{\nu ijk}^{h} \varepsilon^{\nu} \partial_{h})^{(\varepsilon^{\alpha}\varepsilon^{\beta}\varepsilon^{\gamma})} = R_{ijk\sigma}^{\alpha\beta\gamma h} \partial_{h}^{\sigma}.$$

Значит,

$$R_{ijk\sigma}^{\alpha\beta\gamma h} = \gamma_{\mu}^{\alpha\beta} \gamma_{\tau}^{\mu\gamma} \gamma_{\sigma}^{\tau\nu} R_{\nu ijk}^{h}.$$

Из этих равенств следуют (3).

В равенствах (1) поменяем местами индексы α и β и полученные соотношения вычтем из (1). В результате перейдем к следующим равенствам:

$$\begin{gathered}\delta_{i}^{h}(\delta_{\sigma}^{\alpha}(R_{kj}^{\gamma\beta} - R_{jk}^{\beta\gamma}) - \delta_{\sigma}^{\beta}(R_{kj}^{\gamma\alpha} - R_{jk}^{\alpha\gamma})) - \frac{1}{mn-1}\delta_{j}^{h} \times \\ \times \left[mn(\delta_{\sigma}^{\beta} R_{ik}^{\alpha\gamma} - \delta_{\sigma}^{\alpha} R_{ik}^{\beta\gamma}) + \delta_{\sigma}^{\beta} R_{ki}^{\gamma\alpha} - \delta_{\sigma}^{\alpha} R_{ki}^{\gamma\alpha}\right] = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Свернем (4) по α и σ. Тогда

$$\begin{gathered}\delta_{i}^{h}((m-1)R_{kj}^{\gamma\beta} - (m-1)R_{jk}^{\beta\gamma}) - \frac{1}{mn-1}\delta_{j}^{h} \times \\ \times [mn(1-m)R_{ik}^{\beta\gamma} + (1-m)R_{ki}^{\gamma\beta}] = 0.\end{gathered}$$

Откуда после сокращения на $(m-1)$ получим

$$\delta_{i}^{h}(R_{kj}^{\gamma\beta} - R_{jk}^{\beta\gamma}) + \frac{1}{mn-1}\delta_{j}^{h}(mnR_{ik}^{\beta\gamma} + R_{ki}^{\gamma\beta}) = 0.$$

Свернем эти равенства по h и i.

$$\left(n + \frac{1}{mn-1}\right)R_{kj}^{\gamma\beta} + \left(\frac{mn}{mn-1} - n\right)R_{jk}^{\beta\gamma} = 0. \tag{5}$$

Отсюда, заменив k на j, j на k, получим

$$\left(\frac{mn}{mn-1} - n\right)R_{kj}^{\beta\gamma} + \left(n + \frac{1}{mn-1}\right)R_{jk}^{\gamma\beta} = 0.$$

Последнее соотношение можно представить за счет симметрии по β и γ следующим образом

$$\left(\frac{mn}{mn-1}-n\right)R^{\gamma\beta}_{kj}+\left(n+\frac{1}{mn-1}\right)R^{\beta\gamma}_{jk}=0. \qquad (6)$$

Из соотношений (5) и (6) получаем, что $R^{\beta\gamma}_{jk}=0$. Отсюда следует, что $R^{\alpha\beta\gamma h}_{ijk\sigma}=0$. Таким образом, доказана

Теорема. Следующие условия эквивалентны:

1) пространство (M^R_{mn},∇^R) — локально проективно плоское;

2) пространство (M^R_{mn},∇^R) — локально плоское.

Список литературы

1. *Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В.* Пространства над алгебрами. Казань,. 1984.

A. Sultanov

ON THE REAL REALIZATION OF HOLOMORPHIC LINEAR CONNECTION OVER AIGERRA

It is proved that real realization of the holomorphic linear connection is local projectively flat if and only if the connection ∇ is local flat.

УДК 514.75

М. А. Чешкова

(Алтайский государственный университет)

К ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТИ ЭННЕПЕРА

В евклидовом пространстве E^3 изучается поверхность Эннепера. В процессе исследования используется система компьютерной математики Maple [1].