УДК 514.75

А. В. Кулешов[1]
[1] Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
arturkuleshov@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6856-4126
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-11

О геометрии орбит пространства адаптированных проективных реперов

Данная работа продолжает исследование геометрии орбит проективных реперов, начатое в статье предыдущего выпуска. Рассматривается n-мерное проективное пространство с выделенной точкой (центром). На многообразии адаптированных проективных реперов данного пространства определено действие матричной аффинной группы порядка n. Показано, что линейные реперы, то есть базисы касательного пространства, можно отождествить с орбитами адаптированных проективных реперов по действию некоторого нормального делителя данной группы. Несколько упрощено доказательство теоремы о гиперплоскости Дезарга.

Ключевые слова: проективное пространство, проективный репер, группа проективных преобразований, факторгруппа Ли, представление группы Ли, пространство орбит, теорема Дезарга.

1. Введение

Метод Э. Картана успешно применяется при изучении однородных пространств и пространств со связностями, в частности в задачах локальной проективной дифференциальной геометрии подмногообразий (см., напр., монографию [7]).

Поступила в редакцию 31.05.2019 г.

В рамках данного метода с подмногообразием однородного пространства ассоциируется главное расслоение реперов, адаптированных данному подмногообразию, и дальнейшее исследование производится в терминах структурных уравнений, то есть уравнений на внешние дифференциалы базисных и слоевых форм данного расслоения. Анализируя систему структурных уравнений, можно, в частности, установить существование фактор-расслоений данного расслоения. Однако описание явной конструкции таких фактор-расслоений является самостоятельной задачей, зачастую нетривиальной. Ее решение основано на следующем принципе: *точки фактор-расслоения суть орбиты точек исходного расслоения под действию некоторой подгруппы структурной группы последнего*. Таким образом, первым шагом на пути описания фактор-расслоений является изучение устройства таких орбит как с топологической, так и с геометрической точки зрения.

Так, в ряде работ (напр., [1; 5; 6]) рассматривается главное расслоение центропроективных реперов над различного вида гладкими семействами плоскостных элементов в проективном пространстве. Исходя из вида структурных уравнений данного расслоения авторы заключают о наличии главного фактор-расслоения, структурная группа которого изоморфна полной линейной группе, не описывая элементы такого фактор-расслоения явным образом. Такое описание в свете сформулированного выше принципа означает изучение геометрического устройства орбит проективных реперов по действию подходящей нормальной подгруппы H структурной группы G исходного расслоения. Ввиду того что в проективной геометрии реперы приобретают наглядный геометрический смысл, естественно поставить вопрос о критерии принадлежности двух реперов одной H-орбите в бескоординатной форме, то есть в виде геометрической конструкции в духе синтетической геометрии. Заметим, что для достижения поставленной цели достаточно ограничиться одним отдельно взятым слоем рассматриваемого расслоения.

Решению указанного вопроса посвящена статья [4], в настоящей же работе представлен несколько иной подход к описанию орбит и, кроме того, даны более простые по сравнению с [4] доказательства основных теорем.

Все многообразия, рассматриваемые ниже, принадлежат классу C^{ω}, а все группы являются группами Ли.

По повторяющимся верхнему и нижнему индексам производится суммирование согласно правилу Эйнштейна.

2. Многообразия $F(P_n)$ и $F(V)$

Кратко напомним основные конструкции в [4]. Пусть P_n — n-мерное проективное пространство; V_{n+1} — ассоциированное с ним (n + 1)-мерное векторное пространство; A — выделенная точка пространства P_n, называемая его центром; $\mathfrak{R} = \{A, A_1, ..., A_n, E\}$ — адаптированный проективный репер, $\vec{\mathfrak{R}} = \{\vec{A}_0, \vec{A}_1, ..., \vec{A}_n\}$ — базис пространства V_{n+1}, порождающий данный репер; $(x^0, x^1, \ldots, x^n)$ — однородные координаты пространства P_n в репере $\mathfrak{R}$; $(X^1, \ldots, X^n)$ — соответствующие неоднородные координаты; $F(P_n)$ — множество всех адаптированных проективных реперов; $V = T_A P_n$ — касательное векторное пространство к P_n в центре A; $\vec{\xi}$ — базис этого пространства; $F(V)$ — множество всех базисов пространства V.

Формулы перехода от одного адаптированного репера к другому имеют вид

$$X^i = \frac{\alpha^i_j \widetilde{X}^j}{1 + \alpha_j \widetilde{X}^j}, \quad \det(\alpha^i_j) \neq 0. \tag{1}$$

Каждому адаптированному реперу $\mathfrak{R}$ сопоставляется натуральный базис $\varepsilon(\varphi_{\mathfrak{R}})$ относительно неоднородных координат, порождаемых данным репером. Таким образом, определена сюръективная субмерсия $\alpha : F(P_n) \to F(V)$, действующая по закону $\Re \mapsto \varepsilon(\varphi_{\Re})$.

3. Действия матричных групп на многообразиях $F(P_n)$ и $F(V)$

Опишем действия матричных групп на реперах и базисах, поскольку именно матричные группы обычно выступают в роли структурных групп главных расслоений (см., например, конструкции расслоений в [3]).

Рассмотрим два адаптированных репера $\Re$ и $\Re'$, и пусть формула перехода от первого ко второму имеет вид (1). Из коэффициентов данной формулы составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ 0 & \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_1^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $A_0 \in GL(n)$, α — строка из *n* элементов. Хорошо известно [3], что множество всех невырожденных матриц вида (2) образует группу $GA(n)$. Группа $T(n)$, образованная матрицами вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

является ее нормальным делителем (здесь I_n — единичная матрица порядка *n*).

Будем рассматривать (1) как формулу действия матрицы *A* на репер $\Re$, а репер $\Re'$ — соответственно как образ репера $\Re$ по данному действию:

$$\Re' = \Re \cdot A. \tag{3}$$

При этом для любых базисов $\vec{\mathfrak{R}}$ и $\vec{\mathfrak{R}}'$, порождающих реперы $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ соответственно, найдется скалярный множитель $\lambda \neq 0$ такой, что

$$\lambda \vec{\mathfrak{R}}' = \vec{\mathfrak{R}} \cdot A,$$

где справа стоит обычное произведение матрицы-строки из элементов базиса $\vec{\mathfrak{R}}$ на матрицу A.

Аналогично действие матрицы $A_0 \in GL(n)$ на многообразии $F(V)$ можно задать по формуле

$$\vec{\xi}' = \vec{\xi} \cdot A_0, \ \vec{\xi}, \ \vec{\xi}' \in F(V). \tag{4}$$

Формула (3) задает правое действие матричной группы $GA(n)$ на многообразии $F(P_n)$, а формула (4) — правое действие группы $GL(n)$ на $F(V)$.

Рассмотрим гомоморфизм групп Ли

$$\gamma : GA(n) \to GL(n), \quad A \mapsto A_0,$$

где матрица A имеет строение (2). Его ядром является $T(n)$, причем факторгруппа по ядру изоморфна $GL(n)$.

Если в (3) матрица А принадлежит $T(n)$, то формула перехода между реперами $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ имеет вид

$$X^i = \frac{h\widetilde{X}^i}{1 + \alpha_j \widetilde{X}^j}, \tag{5}$$

а потому $T(n)$-орбита любого репера $\mathfrak{R} \in F(P_n)$ совпадает с его H-орбитой (см. [4]), то есть

$$F(P_n)/T(n) = \Phi.$$

Реперы, принадлежащие одной H-орбите (или, что то же самое, одной $T(n)$-орбите), названы нами [4] эквивалентными $(\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}')$. Известно [4], что существует единственный диффеоморфизм $\overline{\alpha} : \Phi \to F(V)$ такой, что $\overline{\alpha} \circ p = \alpha$, он действует по закону $\overline{\alpha}:[\Re]\to\varepsilon(\varphi_{\Re})$. На Φ корректно определено свободное транзитивное действие группы $GL(n)$ справа по следующему правилу: $[\Re]\cdot A_0=[\Re\cdot A]$, где $A\in\gamma^{-1}(A_0)$.

Утверждение 1. *Отображение* $\overline{\alpha}$ *является изоморфизмом многообразий* Φ *и* $F(V)$ *как пространств представления группы* $GL(n)$.

Доказательство производится аналогично Утверждению 1 работы [4].

4. Геометрическое описание орбит

Далее рассмотрим общий случай $n\geq 2$. Пусть $\Re,\ \Re'\in F(P_n)$, где

$$\Re=\{A,\ A_1,\dots,A_n,E\},\ \Re'=\{A',\ A'_1,\dots,A'_n,E'\}\ .$$

Эти реперы называются перспективными ($\Re\cong\Re'$), если

$$A'_i\in A_iA_0\quad (i=\overline{1,n}),\quad E'\in EA_0\,.$$

Утверждение 2. *Пусть* $\Re$ *и* $\Re'$ *— произвольные адаптированные реперы. Тогда* $\Re$ *и* $\Re'$ *перспективны в том и только том случае, если формулы перехода от* $\Re$ *к* $\Re'$ *имеют вид*

$$X^i=\frac{h\widetilde{X}^i}{1+\alpha_j\widetilde{X}^j}. \tag{6}$$

Непосредственно из (5) и (6) вытекает

Теорема 1. *Два адаптированных проективных репера эквивалентны тогда и только тогда, когда, во-первых, они перспективны и, во-вторых, коэффициент h (см. формулу (6)) равен единице:*

$$\Re\sim\Re'\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\Re\cong\Re',\\ h=1.\end{cases}$$

Реперы $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ называются строго перспективными, если они перспективны и их соответствующие вершины не совпадают, то есть

$$A'_i \neq A_i \ \ (i = \overline{1,n}), \quad E' \neq E.$$

Для любого набора подмножеств $Y_1, ..., Y_s \subset P_n$ обозначим через $\langle Y_1, ..., Y_s \rangle$ наименьшую (по включению) плоскость пространства P_n, содержащую все данные подмножества.

Далее введем следующие обозначения:

$$M := \langle A_1, ..., A_n \rangle, \quad M' := \langle A'_1, ..., A'_n \rangle, \quad N = M \cap M'.$$

Для двух строго перспективных реперов $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ определены точки

$$B_i = A_i E \cap A'_i E', \quad i = \overline{1,n},$$

а также плоскость

$$L_{(\mathfrak{R},\mathfrak{R}')} = \langle B_1, ..., B_n, N \rangle.$$

Кроме того, в данном случае M и M' не совпадают, и поэтому $\dim N = n-2$.

Теорема 2. *Для любых строго перспективных реперов* $\mathfrak{R}$ *и* $\mathfrak{R}'$ *плоскость* $L_{(\mathfrak{R},\mathfrak{R}')}$ *является гиперплоскостью в* P_n.

Доказательство. В случае $n = 2$ утверждение совпадает с классической теоремой Дезарга (см., напр., [2]). Далее будем полагать $n > 2$.

Покажем, что $\dim L_{(\mathfrak{R},\mathfrak{R}')} \geq n-1$. Для этого убедимся в том, что $B_1 \notin N$. В самом деле, если предположить, что $B_1 \in N$, то $B_1 \in M$. С учетом $B_1 \in A_1 E$ и $A_1 \in M$ мы приходим к тому, что $E \in M$, что невозможно, так как E — единичная точка репера $\mathfrak{R}$. Заметим, что аналогичным образом можно убедиться в том, что $B_j \notin N$ ($j = \overline{2,n}$).

Покажем теперь, что $\dim L_{(\mathfrak{R},\mathfrak{R}')} \le n-1$, то есть что $B_j \in \langle B_1, N \rangle$ для любого $j = \overline{2,n}$. Действительно, рассмотрим 3-плоскость $\langle A_0A_1, A_0A_j, A_0E \rangle$. Она содержит 2-плоскости $\langle A_i, A_j, E \rangle$ и $\langle A'_i, A'_j, E \rangle$. Пересечение этих плоскостей представляет собой прямую, содержащую точки C_j, B_i и B_j, где $C_j = A_1A_j \cap A'_iA'_j$. Значит, точка B_j лежит на прямой B_1C_j для любого $j = \overline{2,n}$. Тогда $B_j \in \langle B_1, N \rangle$, что и требовалось доказать.

Замечание. Данное доказательство несколько проще, чем в статье [4]. Неравенство $\dim L_{(\mathfrak{R},\mathfrak{R}')} \le n-1$ также непосредственно вытекает из результатов работы [8].

Плоскость $L_{(\mathfrak{R},\mathfrak{R}')}$ совпадает с гиперплоскостью Дезарга [4], порожденной реперами $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ — строго перспективные реперы n-мерного проективного пространства P_n с центром A. Тогда они эквивалентны в том и только том случае, когда гиперплоскость Дезарга $L_{(\mathfrak{R},\mathfrak{R}')}$ проходит через центр.*

Доказательство. Пусть реперы $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ строго перспективны. Тогда они перспективны, и для них справедливы равенства (6). В однородных координатах относительно репера $\mathfrak{R}$ гиперплоскости M и M' задаются соответственно уравнениями

$$M : x^0 = 0, \quad M' : \alpha_i x^i - hx^0 = 0.$$

Таким образом, уравнение пучка гиперплоскостей M', проходящих через плоскость N, можно представить в виде

$$S_{(\lambda:\mu)} : \lambda x^0 + \mu\, \alpha_i x^i = 0, \quad \lambda^2 + \mu^2 \ne 0 . \tag{7}$$

Для точки найдется такой вектор $\vec{B}_1 \in \pi^{-1}(B_1)$, что

$$\vec{B}_1 = -\frac{e}{a_1}\vec{A}_1 + \vec{E},$$

где

$$e = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n + 1 - h .$$

Гиперплоскость $L_{(\Re,\Re')}$ выделяется из данного пучка условием $B_1 \in L_{(\Re,\Re')}$, которое, в свою очередь, равносильно соотношению

$$\lambda = (1-h)\mu .$$

Подставляя его в (7), получаем уравнение гиперплоскости $L_{(\Re,\Re')}$:

$$L_{(\Re,\Re')} : (1-h)x^0 + \mu\, a_i x^i = 0 . \tag{8}$$

Таким образом,

$$A_0 \in L_{(\Re,\Re')} \;\Leftrightarrow\; h = 1 \;\Leftrightarrow\; \Re \sim \Re' .$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Белова О. О.* Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием Грассмана и пространством центрированных плоскостей // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14, вып. 2. С. 29—67.

2. *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия. 7-е изд. М., 2004.

3. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М., 1981.

4. *Кулешов А. В.* О линейной факторгруппе центропроективной группы // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2018. Вып. 49. С. 112—122.

5. *Омельян О.М.*, *Шевченко Ю.И.* Редукции объекта центропроективной связности и тензора аффинного кручения на распределении плоскостей // Математические заметки. 2008. Т. 84, вып. 1. С. 99—107.

6. *Полякова К.В.* Параллельные перенесения на поверхности проективного пространства // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14, вып. 2. С. 129—177.

7. *Akivis A., Goldberg V.* Projective differential geometry of submanifolds. Amsterdam, 1993.

8. *Bell P.O.* Generalized theorems of Desargues for n-dimensional projective space // Proc. Amer. Math. Soc. 1955. № 6. P. 675—681.

A. Kuleshov[1]
[1] Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
arturkuleshov@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6856-4126
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-11

On geometry of orbits of adapted projective frame space

Submitted on May 31, 2019

The current paper continues consideration of geometry of projective frame orbits started in the author's article in the previous issue. The n-dimensional projective space with a distinguished point (the center) is considered. The action of matrix affine group of order n on the adapted projective frame manifold is given. It is shown that the linear frames, i. e., bases of the tangent space, can be identified with the orbits of adapted projective frames under the action of some normal subgroup of this group. Two adapted frames are said to be equivalent if they belong to the same orbit. The strict perspectivity relation between two adapted frames is introduced. The proofs of the theorem on the Desargues hyperplane and of the criterion of equivalence are simplified. According to this criterion, two adapted frames in strict perspective are equivalent if and only if the Desargues hyperplane generated by these frames is passing through the center.

Keywords: projective space, projective frame, the projective transformations group, quotient Lie group, Lie group representation, orbit space, the Desargues theorem.

References

1. *Belova, O. O.*: Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centered planes. J. Math. Sci., **162**:5, 605—632 (2009).

2. *Efimov, N. V.*: Higher geometry. Moscow (2004) (in Russian).

5. *Kobayashi, S, Nomizu, K.*: Foundations of differential geometry. Vol. 1. N. Y. ; London (1963).

4. *Kuleshov, A. V.*: On the linear quotient group of the center-projective group. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 49, 112—122 (2018) (in Russian).

5. *Omelyan, O. M., Shevchenko, Yu. I.*: Reductions of the centroprojective connection object and the affine torsion tensor on a plane distribution. Math. Notes, **84**:1, 100—107 (2008).

6. *Polyakova, K. V.*: Parallel displacements on the surface of a projective space. J. Math. Sci., **162**:5, 129—177 (2009).

7. *Akivis, A., Goldberg, V.*: Projective differential geometry of submanifolds. Amsterdam (1993).

8. *Bell, P. O.*: Generalized theorems of Desargues for n-dimensional projective space. Proc. Amer. Math. Soc., 6, 675—681 (1955).