УДК 514.76

М.Б. Банару
Смоленский государственный университет
mihail.banaru@yahoo.com

О локально симметрических 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли

Выведены структурные уравнения локально симметрических эрмитовых 6-мерных подмногообразий типа Риччи алгебры октав. Получена формула для вычисления их бисекционной голоморфной кривизны.

Ключевые слова: алгебра октав, эрмитово многообразие, локально симметрическое пространство.

1. Как известно [1], почти эрмитовой (almost Hermitian, AH-) структурой на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Здесь $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких (класса C^∞) векторных полей на многообразии M^{2n}. Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым (AH-) многообразием. Почти эрмитово многообразие называется эрмитовым, если индуцируемая на нем почти эрмитова структура интегрируема [1].

Пусть $\mathbf{O} \equiv \mathbf{R}^8$ — алгебра Кэли. Установлено [2], что в ней определены два неизоморфных 3-векторных произведения:

$$P_1(X,Y,Z) = -X(\overline{Y}Z) + \langle X,Y\rangle Z + \langle Y,Z\rangle X - \langle Z,X\rangle Y;$$

$$P_2(X,Y,Z) = -(X\overline{Y})Z + \langle X,Y\rangle Z + \langle Y,Z\rangle X - \langle Z,X\rangle Y.$$

Здесь $X,Y,Z \in \mathbf{O}$; $\langle \cdot,\cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{O}$, $X \to \overline{X}$ — оператор сопряжения в $\mathbf{O}$. При этом любое другое 3-векторное произведение в алгебре октав изоморфно одному из вышеуказанных. Пусть $M^6 \subset \mathbf{O}$ — 6-мерное ориентируемое подмногообразие алгебры Кэли. Тогда на нем индуцируется почти эрмитова структура $\{J_\alpha, g = \langle \cdot,\cdot \rangle\}$, определяемая в каждой точке $p \in M^6$ соотношением $J_\alpha(X) = P_\alpha(X, e_1, e_2)$, $\alpha = 1, 2,$ где $\{e_1, e_2\}$ — произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 подпространства в точке p, $X \in T_p(M^6)$ [2]. Напомним, что точка $p \in M^6$ называется общей, если $e_0 \notin T_p(M^6)$, где e_0 — единица алгебры Кэли. Подмногообразия, состоящие только из общих точек, называются подмногообразиями общего типа [2].

Все рассматриваемые далее подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ подразумеваются подмногообразиями общего типа. Шестимерные подмногообразия алгебры Кэли являются источником интересных и содержательных примеров почти эрмитовых структур. Отметим, что обзор [3] об эрмитовой геометрии 6-мерных подмногообразий алгебры октав содержит множество результатов, полученных в этой области за последние 30 лет.

2. Особую роль в эрмитовой геометрии 6-мерных многообразий играют локально симметрические подмногообразия алгебры октав. Их изучению посвящено несколько интересных работ, самая значительная из которых, на наш взгляд, принадлежит В. Ф. Кириченко [4]. В ней введены в рассмотрение и исследованы 6-мерные типа Риччи эрмитовы подмногообразия алгебры Кэли. Приведем их определение. Для этого напомним, что точка $p \in M^6$ называется специальной, если

$$T_p(M^6) \subset L(e_0)^{\perp},$$

где $L(e_0)^{\perp}$ — ортогональное дополнение единицы алгебры октав. В противном случае точка p называется простой. Ясно, что совокупность всех простых точек M^6 представляет собой открытое подмногообразие $M_0^6 \subset M^6$, на котором канонически индуцируется распределение Z, порожденное ортогональными проекциями вектора e_0 на касательное пространство $T_p(M^6)$, $p \in M_0^6$. Такое распределение Z, а также одномерное пространство $Z_p \in T_p(M^6)$, $p \in M_0^6$, называют исключительными [4].

Определение [4; 5]. Эрмитово подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ называют *подмногообразием типа Риччи*, если кривизна Риччи в каждой точке $p \in M_0^6$ в направлении исключительного пространства Z_p принимает минимальное значение.

В [4] получена полная классификация локально-симметрических эрмитовых подмногообразий $M^6 \subset \mathbf{O}$ типа Риччи: эрмитово локально симметрическое подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ типа Риччи локально голоморфно изометрично либо C^3, либо произведению келеровых C^2 и CH^1, «скрученному» вдоль CH^1 (здесь через C^n обозначено n-мерное комплексное евклидово пространство, через CH^1 — комплексное гиперболическое пространство).

Кроме того, в [4] доказано, что матрица (D_{ab}) при соответствующем выборе репера для такого подмногообразия алгебры октав имеет вид:

$$\begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем для случая произведения C^2 и CH^1 имеет место $D_{11} \neq 0$.

Воспользуемся структурными уравнениями почти эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав [2; 6]:

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{abh} D_{hc}\omega^c \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ah[b} D_h{}^{c]}\omega_b \wedge \omega_c;$$

$$d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{abh} D^{hc}\omega_c \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ah[b} D^h{}_{c]}\omega^b \wedge \omega^c; \quad (1)$$

$$d\omega^a_b = \omega^a_c \wedge \omega^c_b - \left(\frac{1}{2}\delta^{ah}_{bg} D_{h[k} D^g{}_{j]} + \sum_{\varphi} T^{\varphi}_{\hat{a}[k} T^{\varphi}_{j]b}\right)\omega^k \wedge \omega^j,$$

где $\{\omega^k\}$ — компоненты формы смещения; $\{\omega^k_j\}$ — компоненты формы римановой связности. Условимся, что здесь и далее $\varphi = 7, 8$; $a, b, c, d, g, h = 1, 2, 3$; $\hat{a} = a + 3$; $k, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Как и в [6], $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$. При этом $\varepsilon_{abc} = \varepsilon^{123}_{abc}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon^{abc}_{123}$ — компоненты тензора Кронекера порядка три; $\delta^{ah}_{bg} = \delta^a_b \delta^h_g - \delta^a_g \delta^h_b$;

$$D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}},\ D_h{}^c = D_{h\hat{c}},\ D^h{}_c = D_{\hat{h}c};$$

$$D_{cj} = \mp T^8_{cj} + iT^7_{cj},\ D_{\hat{c}j} = \mp T^8_{\hat{c}j} - iT^7_{\hat{c}j},$$

где $\left\{T^{\varphi}_{kj}\right\}$ — компоненты конфигурационного тензора (в терминологии Грея), или второй основной формы погружения подмногообразия M^6 [6].

Поскольку почти эрмитово подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ является эрмитовым тогда и только тогда [7], когда $D_{\hat{a}b} = D_{a\hat{b}} = 0$, то уравнения (1) для 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли примут вид

$$d\omega^a = \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b;$$

$$d\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b; \qquad (2)$$

$$d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2} \delta_{bg}^{ah} D_{hd} D^{gc} + \sum_{\varphi} T_{\hat{a}\hat{c}}^{\varphi} T_{bd}^{\varphi} \right) \omega_c \wedge \omega^d.$$

Принимая во внимание упомянутый выше результат из [4] о матрице (D_{ab}), мы можем переписать первую группу уравнений (2) следующим образом:

$$d\omega^1 = \omega_1^1 \wedge \omega^1; \; d\omega_1 = -\omega_1^1 \wedge \omega_1;$$

$$d\omega^\alpha = \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{1\alpha\beta} D_{11} \omega^1 \wedge \omega_\beta;$$

$$d\omega_\alpha = -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{1\alpha\beta} D^{11} \omega_1 \wedge \omega^\beta.$$

Согласно определению [8], бисекционная голоморфная кривизна в направлении бивектора $X \wedge Y$ задается соотношением

$$BS_{X \wedge Y} = R(X, JX, Y, JY), \qquad (3)$$

где $\|X\| = \|Y\| = 1.$

Также воспользуемся формулой для вычисления скалярной кривизны [8]:

$$K = ric_j^{\,j}.$$

В итоге из формулы (3) получаются следующие значения для бисекционной голоморфной кривизны и скалярной кривизны локально-симметрических эрмитовых подмногообразий $M^6 \subset \mathbf{O}$ типа Риччи:

$$BS_{X \wedge Y} = -4\sum_{\varphi} \left| T_{11}^{\varphi} X^1 Y^1 \right|^2; \;\; K = -2\sum_{\varphi} \left| T_{11}^{\varphi} \right|^2. \qquad (4)$$

Таким образом, доказана

Теорема. *Бисекционная голоморфная кривизна и скалярная кривизна локально-симметрических эрмитовых подмногообразий $M^6 \subset \mathbf{O}$ типа Риччи вычисляются по формулам (4).*

Очевидно, что эти кривизны неположительны, причем их обращение в нуль будет означать равенство нулю всех компонент $\left\{T_{kj}^{\varphi}\right\}$ конфигурационного тензора в соответствующих точках.

Список литературы

1. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

2. *Кириченко В. Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Математика. 1980. №8. С. 32—38.

3. *Банару М. Б.* Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2014. Т. 126. С. 10—61.

4. *Кириченко В. Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли // Вестник Московского ун-та. Сер.: Математика. Механика. 1994. №3. С. 6—13.

5. *Банару М. Б., Кириченко В. Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Успехи математических наук. 1994. №1. С. 205—206.

6. *Банару М. Б.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алебры Кэли // Математический сборник. 2002. Т. 193, №5. С. 3—16.

7. *Banaru M.* On the Gray — Hervella classes of AH-structures on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra // Annuaire de l'universite de Sofia «St. Kl. Ohridski». Math. 2004. T. 95. P. 125—131.

8. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. М., 1981.

M. Banaru

On locally symmetric 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra

The structural equations of locally symmetric six-dimensional Hermitian submanifolds of Ricci type of octave algebra are obtained. A formula for the bisectional holomorphic curvature of such submanifolds is also given.

УДК 514.75

К. В. Башашина
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
baschaschina@mail.ru

Редукция тензора аффинной кривизны к тензору кривизны фундаментально-групповой связности на поверхности аффинного пространства

В многомерном аффинном пространстве задана аффинная связность с помощью форм связности. Показано, что эта связность задается тензором неканонической аффинной связности, который определяет ее тензоры кривизны и кручения. В аффинном пространстве задана m-мерная поверхность, рассматриваемая как m-параметрическое семейство, описанное касательной плоскостью. В главном расслоении, ассоциированном с поверхностью, задана фундаментально-групповая связность способом Лаптева — Лумисте.