УДК 514.75

М.В. Сорокина

(Пензенский государственный педагогический университет)

ЛАГРАНЖЕВЫ ПРОСТРАНСТВА С (α, β)-МЕТРИКОЙ

Исследуются лагранжевы пространства $L^n = (M, L)$, лагранжиан L которых является функцией двух аргументов $\alpha = \frac{1}{2} a_{ij}(x) y^i y^j$ и $\beta = b_i(x) y^i$ и имеет следующий вид: $L = F(\alpha) + \beta$, где $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ компоненты риманова метрического тензора и дифференциальной формы соответственно, а F — произвольная функция аргумента α. Уравнения Эйлера — Лагранжа приведены к каноническому виду, что позволяет выписать коэффициенты инфинитезимальной связности, которая для лагранжиана L является нелинейной. Доказано, что метрический тензор пространства L^n ковариантно постоянен относительно связности Леви-Чивита римановой метрики α, а векторное поле является инфинитезимальным движением тогда и только тогда, когда оно является инфинитезимальным движением римановой метрики α и оставляет инвариантной 1-форму β.

1. Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, TM — касательное расслоение над M, (x^i) — локальные координаты на M, (x^i, y^i) — естественные локальные координаты на TM. Многообразие M называется лагранжевым пространством L^n, если на TM задана скалярная функция $L(x, y)$, удовлетворяющая условию невырожденности: $\det\left\| L_{\cdot i \cdot j} \right\| \neq 0$ ($L_{\cdot i} = \partial L / \partial y^i$). Функции $L_{\cdot i \cdot j}$ являются компонентами тензора g, который, как и в случае финслеровой геометрии, называется метрическим: $g = g_{ij}(x,y)dx^i \otimes dx^j$, $g_{ij} = L_{\cdot i \cdot j}$, а лагранжиан L — метрической функцией, или метрикой. С точки зрения классической механики механическая система задается многообразием *M* (конфигурационным пространством) и лагранжианом *L*, заданным на *TM* (фазовом пространстве). Траектории движения механической системы совпадают с экстремалями функционала $\int Ldt$ (принцип наименьшего действия), которые подчиняются уравнениям Эйлера — Лагранжа [1]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0. \qquad (1)$$

2. Лагранжиан *L* назовем (α, β)-метрикой, если *L* является функцией двух аргументов $\alpha = \frac{1}{2}a_{ij}(x)y^i y^j$ и $\beta = b_i(x)y^i$, где $a_{ij} = a_{ij}(x)$ — компоненты риманова метрического тензора, $b_i = b_i(x)$ — компоненты линейной дифференциальной формы, заданные на базисном многообразии *M*.

Рассмотрим лагранжиан

$$L = F(\alpha) + \beta, \qquad (2)$$

где *F* — функция только аргумента α, $F' = dF/d\alpha \neq 0$.

Добавление к лагранжиану *F* дифференциальной формы β называют «включением поля» [2]. Если n = 4 и a_{ij} — компоненты метрического тензора пространства Минковского $E^4_{1,3}$, то b_i есть вектор — потенциал электромагнитного поля.

Утверждение 1. *Лагранжиан (2) является невырожденным, если* $F' + 2\alpha F'' \neq 0$ $(F \neq \sqrt{\alpha})$.

Действительно, имеем $L_{\cdot i} = F'y_i + b_i$, $y_i = a_{ip}y^p$,

$$g_{ij} = F'a_{ij} + F''y_i y_j. \qquad (3)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функции

$$g^{ij} = \frac{1}{F'}\left(a^{ij} - \frac{F''}{F' + 2\alpha F''} y^i y^j\right) \tag{4}$$

являются контравариантными компонентами метрического тензора g: $g^{ip} g_{pj} = \delta^i_j$ ($a^{ip} a_{pj} = \delta^i_j$).

Утверждение 2. *Уравнения Эйлера — Лагранжа для лагранжиана (2) имеют следующий канонический вид:*

$$\ddot{x}^k + 2G^k = 0\,, \tag{5}$$

где

$$G^k = \frac{1}{2}\left(\Gamma^k_{ij} y^i y^j - \frac{1}{F'} a^{ks} A_{sj} y^j\right) \ (y^i = \dot{x}^i)\,, \tag{6}$$

$$A_{ij} = \partial_i b_j - \partial_j b_i \tag{7}$$

— компоненты внешнего дифференциала db_i формы b_i,

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} a^{kp} (\partial_i a_{pj} + \partial_j a_{ip} - \partial_p a_{ij}) \tag{8}$$

— компоненты связности Леви-Чивита ∇ риманова метрического тензора a_{ij}.

Уравнения Эйлера — Лагранжа запишем в развернутом виде:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \ddot{x}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j} \dot{x}^j - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0\,. \tag{9}$$

Вычисляя необходимые частные производные и подставляя в уравнения (9), находим дифференциальные уравнения лагранжиана (2):

$$(F' a_{ij} + F'' y_i y_j)\ddot{x}^j + \left(\frac{1}{2} F'' \partial_j a_{ps} y^p y^s \cdot a_{ik} y^k + \partial_j a_{ip} y^p + \partial_j b_i\right) y^j -$$

$$- F' \frac{1}{2} \partial_i a_{ps} y^p y^s - \partial_i b_p y^p = 0 \ \ (y^i = \dot{x}^i)\,. \tag{10}$$

Умножая уравнения (10) на g^{ik}, после несложных преобразований получим уравнения (5).

Дифференцируя выражение (6) по y^i, находим

$$G_i^k = \Gamma_{ij}^k y^j + \frac{F''}{F'^2} a^{ks} y_i A_{sj} y^j - \frac{1}{F'} a^{ks} A_{si}. \qquad (11)$$

Функции G_i^k есть компонентами инфинитезимальной связности, которая в отличие от классического случая $L = \frac{1}{2} a_{ij} y^i y^j + b_i y^i$ (F(α)=α) является нелинейной.

Утверждение 3. *Метрический тензор (3) ковариантно постоянен относительно связности Леви-Чивита ∇.*

Имеем

$$\nabla_k a_{ij} = 0, \ \nabla_k y^i = 0, \ \nabla_k y_i = 0.$$

Если $\varphi(x, y)$, то $\nabla_k \varphi = \partial_k \varphi - \Gamma_{ks}^p y^s \varphi_{\cdot p}$. Поэтому

$$\nabla_k F'(\alpha) = F'' \left(\frac{1}{2} \partial_k a_{ij} y^i y^j - \Gamma_{ki}^p y^i a_{jp} y^j \right) =$$

$$= \frac{1}{2} F'' y^i y^j (\partial_k a_{ij} - \Gamma_{ki}^p a_{jp} - \Gamma_{kj}^p a_{ip}) = \frac{1}{2} F'' y^i y^j \nabla_k a_{ij} \equiv 0.$$

Аналогично получаем $\nabla_k F'' = \frac{1}{2} F''' y^i y^j \nabla_k a_{ij} \equiv 0$, следовательно, $\nabla_k g_{ij} = 0$.

3. Напомним, что векторное поле $X = \xi^i \partial_i$ на M является инфинитезимальным движением лагранжева пространства $L^n = (M, L)$, если производная Ли вдоль X от лагранжиана L обращается в нуль: $D_X L = 0$.

Утверждение 4. *Векторное поле X является инфинитезимальным движением лагранжева пространства с (α,β)-метрикой (3) тогда и только тогда, когда*

$$D_X a_{ij} = 0 \ \text{и} \ D_X b_i = 0. \qquad (12)$$

Доказательство. По определению имеем

$$D_X F + D_X \beta = 0. \qquad (13)$$

Дифференцируя выражение (12) по y^i, а затем по y^j и учитывая перестановочность производной Ли и дифференцирования по координатам касательного вектора, заключаем, что

$$D_X g_{ij} = 0 . \tag{14}$$

Так как $D_X y^i = 0$, то свернув (14) с $y^i y^j$, получим

$$D_X \Phi = 0, \tag{15}$$

где $\Phi = g_{ij} y^i y^j$ и для метрического тензора

$$\Phi(\alpha) = 2\alpha F' + 4\alpha^2 F'' . \tag{16}$$

Далее имеем: $D_X \Phi = \Phi' y^i y^j D_X a_{ij} = 0$. Но $\Phi' \neq 0$ (иначе $g_{ij} y^i y^j = const$). Поэтому $y^i y^j D_X a_{ij} = 0$, откуда $D_X a_{ij} = 0$, следовательно, $D_X F = 0$, а значит, и $D_X \beta = 0$.

Обратно, если $D_X a_{ij} = 0$ и $D_X b_i = 0$, то $D_X F = 0$ и $D_X \beta = 0$, т. е. $D_X L = 0$.

Список литературы

1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М., 1979.

2. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. М., 2001.

M. Sorokina

LAGRANGIAN SPACES WITH (α,β)-METRIC

We study Lagrange spaces with lagrangian $L = F(\alpha) + \beta$ where $\alpha = \frac{1}{2} a_{ij}(x) y^i y^j$, $\beta = b_i(x) y^i$, $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ are components of Riemannian metric tensor and differential form accordingly. Eiler — Lagrange equations were led to canonical form. It is proved that vector field is infinitesimal motion if and only if it is infinitesimal motion of Riemannian metric α and leave invariant 1-form β.