

УДК 514.76

А. Абу-Салим¹, М. Б. Банару², Г. А. Банару²

¹ Университет Аль-аль-Байт, Мафрак, Иордания,

² Смоленский государственный университет, Россия

¹ dr_ahmad57@yahoo.com, ² mihail.banaru@yahoo.com

doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-1

О минимальности почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий

Формулируются две задачи: 1) проанализировать одно из известных условий минимальности почти контактной метрической гиперповерхности почти эрмитова многообразия; 2) выяснить, как связано условие минимальности Аббаса для гиперповерхности с классической обобщенной структурой Кенмоцу в многообразии Вайсмана — Грея с условием минимальности гиперповерхности со структурой Кириченко — Ускорева.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, почти эрмитово многообразие, минимальная гиперповерхность, условия минимальности

1. Отправной точкой для написания данной заметки стало изучение недавно опубликованной статьи [1] иракского геометра Мохаммеда Аббаса. В этой работе рассматривается ситуация, когда на ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия, принадлежащего классу многообразий Вайсмана — Грея, индуцируется так называемая классическая

Поступила в редакцию 17.04.2025 г.

© Абу-Салим А., Банару М. Б., Банару Г. А., 2025

обобщенная структура Кенмоцу. Отметим, что методы исследования почти контактных метрических (almost contact metric, аст-) гиперповерхностей, которыми весьма успешно пользуется М. Аббас, разработаны отечественными геометрами В. Ф. Кириченко и Л. В. Степановой [2; 3]. Отметим также, что это, по нашему мнению, первый интересный и важный случай, когда почти контактная метрическая структура на гиперповерхности, являющаяся обобщенной структурой Кенмоцу, изучается так глубоко и детально. Что касается почти эрмитовых многообразий Вайсмана — Грея (то есть многообразий класса $W_1 \oplus W_4$ в общепринятой терминологии Грея — Хервеллы), то такие многообразия изучались с разных точек зрения многими геометрами. Обратим внимание на то, что класс многообразий Вайсмана — Грея содержит все келеровы, приближенно келеровы и локально конформные келеровы многообразия.

2. Наиболее интересный результат работы [1], на наш взгляд, — критерий минимальности гиперповерхности с обобщенной структурой Кенмоцу в многообразии Вайсмана — Грея: равенство

$$\sigma(\xi, \xi) = 0 \quad (1)$$

является условием, необходимым и достаточным для минимальности гиперповерхности многообразия Вайсмана — Грея, оснащенной обобщенной структурой Кенмоцу [1, с. 10]. Здесь σ — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в многообразие Вайсмана — Грея M^{2n} , ξ — структурный вектор почти контактной метрической структуры на гиперповерхности N^{2n-1} .

3. Условие (1) хорошо знакомо авторам настоящей заметки. Оно возникало ранее при исследовании некоторых видов аст-гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий, принадлежащих различным классам Грея — Хервеллы, причем

как для более близкого нам случая аст-гиперповерхности 6-мерного почти эрмитова многообразия [4—8], так и для случая гиперповерхности почти эрмитова многообразия произвольной размерности [9—12]. Это условие иногда является критерием минимальности аст-гиперповерхности почти эрмитова многообразия; в других случаях оно оказывается только необходимым или только достаточным. Причем в нескольких работах данное условие характеризует минимальность аст-гиперповерхности именно со структурой Кенмоцу (например, в [9; 10] и некоторых других статьях).

4. В конце статьи мы ставим следующую задачу: проанализировать условие (1), систематизировать результаты о минимальности аст-гиперповерхности почти эрмитова многообразия, связанные с этим условием (оно присутствует в десятках статей). Сформулируем еще одну задачу, на наш взгляд, гораздо менее сложную: выяснить, как связано условие (1) с минимальностью аст-гиперповерхности со структурой Кириченко — Ускорева.

Напомним, что структура Кириченко — Ускорева [13; 14] также является обобщением структуры Кенмоцу, однако эта структура отлична от классической обобщенной структуры Кенмоцу, которая рассматривалась в статье [1] и во многих других работах. Наверное, целесообразнее всего при решении этой задачи «поместить» гиперповерхность со структурой Кириченко — Ускорева именно в многообразие Вайсмана — Грея.

Список литературы

1. *Abass M. Y.* On generalized Kenmotsu manifolds as hypersurfaces of Vaisman — Gray manifolds // Владикавказский математический журнал. 2024. Т. 26, № 1. С. 5—12.
2. *Кириченко В. Ф., Степанова Л. В.* О геометрии гиперповерхностей квазикелеровых многообразий // УМН. 1995. № 2. С. 213—214.

3. *Степанова Л.В.* Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий : дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1995.

4. *Banaru M.B.* Two theorems on cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra // J. Harbin Inst. Technol. (N.S.). 2001. Vol. 8, № 1. P. 38—40.

5. *Банару М.Б.* О сасакиевых гиперповерхностях 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Матем. сб. 2003. Т. 194, № 8. С. 13—24.

6. *Банару М.Б.* О типовом числе косимплектических гиперповерхностей 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44, № 5. С. 981—991.

7. *Банару М.Б.* О косимплектических гиперповерхностях 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли // Изв. вузов. Математика. 2003. № 7. С. 59—63.

8. *Abu-Saleem A., Banaru M.B.* On almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere // Malaysian Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 8, № 1. P. 35—46.

9. *Banaru M.B.* On minimality of a Sasakian hypersurface in a W_3 -manifold // Saitama Math. J. 2002. Vol. 20. P. 1—7.

10. *Abu-Saleem A., Banaru M.B.* Two theorems on Kenmotsu hypersurfaces in a W_3 -manifold // Studia Univ. Babeş — Bolyai. Math. 2005. Vol. 51, № 3. P. 3—11.

11. *Кириченко В.Ф., Банару М.Б.* Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий // Итоги науки и техн. Современ. матем. и ее прилож. Темат. обзор. 2014. Т. 127. С. 5—40.

12. *Степанова Л.В., Банару Г.А., Банару М.Б.* О квазисасакиевых гиперповерхностях келеровых многообразий // Изв. вузов. Матем. 2016, № 1. С. 86—89.

13. *Банару М.Б., Банару Г.А.* О гиперповерхностях со структурой Кириченко — Ускорева в келеровых многообразиях // Сиб. электрон. матем. изв. 2020. Т. 17. С. 1715—1721.

14. *Банару Г.А.* О несуществовании структуры Кенмоцу на асимптотически гиперповерхностях косимплектического типа келерова многообразия // ДГМФ. 2019. Вып. 50. С. 23—28.

Для цитирования: Абу-Салим А., Банару М. Б., Банару Г. А. О минимальности почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий // ДГМФ. 2025. № 56. С. 5—11. <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-1>.



ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) ([HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/))

MSC 2010: 53B35, 53B25

A. Abu-Saleem¹, M. B. Banaru², G. A. Banaru²

¹ *Al al-Bayt University, Mafrqa, Jordan*

² *Smolensk State University,*

4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia

¹ *dr_ahmad57@yahoo.com, ² mihail.banaru@yahoo.com*

doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-1

On minimality of almost contact metric hypersurfaces in almost Hermitian manifolds

Submitted on April 17, 2025

We consider obtained in 2024 by M. Y. Abass a minimality criterion for hypersurfaces with classical generalized Kenmotsu structure in a Vaisman — Gray manifold. This condition is known to have arisen in the study of hypersurfaces equipped with certain kinds of almost contact metric structures in almost Hermitian manifolds belonging to various Gray — Hervella classes. The condition was sometimes a minimality criterion for an almost contact metric hypersurface of an almost Hermitian manifold; in other cases, it turned out to be only necessary or only sufficient.

In the present note, we formulate two problems:

1) to analyze in detail the above-mentioned minimality condition for an almost contact metric hypersurface of an almost Hermitian manifold;

2) to find out how the Abass minimality condition for a hypersurface with the classical generalized Kenmotsu structure in a

Vaisman — Gray manifold is related to the minimality of a hypersurface with the Kirichenko — Uskorev structure, which is also a generalization of the Kenmotsu structure.

Keywords: almost contact metric structure, almost Hermitian manifold, minimal hypersurface, minimality condition

References

1. *Abass, M. Y.*: On generalized Kenmotsu manifolds as hypersurfaces of Vaisman — Gray manifolds. Vladikavkaz. Math. J., **26**:1, 5—12 (2024).

2. *Kirichenko, V. F., Stepanova, L. V.*: The geometry of hypersurfaces of quasi-Kählerian manifolds. Russian Math. Surveys, **50**:2, 440—441 (1995).

3. *Stepanova, L. V.*: Contact geometry of hypersurfaces of quasi-Kählerian manifolds. PhD thesis. Moscow State Pedagogical University V.I. Lenin (1995).

4. *Banaru, M. B.*: Two theorems on cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. J. Harbin Inst. Technol. (N. S.), **8**:1, 38—40 (2001).

5. *Banaru, M. B.*: On Sasakian hypersurfaces in 6-dimensional Hermitian submanifolds of the Cayley algebra. Sb. Math., **194**:8, 1125—1136 (2003).

6. *Banaru, M. B.*: The type number of the cosymplectic hypersurfaces of 6-dimensional Hermitian submanifolds of the Cayley algebra. Siberian Math. J., **44**:5, 765—773 (2003).

7. *Banaru, M. B.*: On skew-symplectic hypersurfaces of six-dimensional Kählerian submanifolds of the Cayley algebra. Russian Math. (Izvestia Vuzov), **47**:7, 60—63 (2003).

8. *Abu-Saleem, A., Banaru, M. B.*: On almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere. Malaysian J. of Math. Sci., **8**:1, 35—46 (2014).

9. *Banaru, M. B.*: On minimality of a Sasakian hypersurface in a W_3 -manifold. Saitama Math. J. **20**, 1—7 (2002).

10. *Abu-Saleem, A., Banaru, M. B.*: Two theorems on Kenmotsu hypersurfaces in a W_3 -manifold. Studia Univ. Babeş — Bolyai. Math. **51**:3, 3—11 (2005).

11. *Banaru, M. B., Kirichenko, V. F.*: Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds. J. Math. Sci., New York. **207**:4, 513—537 (2015).

12. *Stepanova, L. V., Banaru, G. A., Banaru, M. B.*: On quasi-Sasakian hypersurfaces of Kählerian manifolds. Russian Math. (Izvestia Vuzov), **80**:1, 73—75 (2016).

13. *Banaru, M. B., Banaru, G. A.*: On hypersurfaces with Kirichenko — Uskorev structure in Kählerian manifolds. Sib. Elektron. Math. Izv., **17**, 1715—1721 (2020).

14. *Banaru, G. A.*: On nonexistence of Kenmotsu structure on *acm*-hypersurfaces of cosymplectic type of a Kählerian manifold. DGMF, **50**, 23—28 (2019).

For citation: Abu-Saleem, A., Banaru, M. B., Banaru, G. A.: On minimality of almost contact metric hypersurfaces in almost Hermitian manifolds. DGMF, **56**, 5—11 (2025). <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-1>.

