ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.15. 1984

УДК 514.75

В.С. М и к у ц к и й

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ φ-СОПРЯЖЕННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

Понятие φ-сопряженных связностей на главном расслоении $P(M,G,\pi)$ для инволютивного автоморфизма $\varphi: G\to G$ структурной группы было введено В.И.Ведерниковым в [1], где сопряженные связности рассматривались как ограничение на P связности некоторого объемлющего расслоения. Удобный критерий φ-сопряженности был дан Я.Ганцжавичем в [2]. Он перешел к рассмотрению произвольного эндоморфизма $\varphi: G\to G$ [3] и доказал следующую теорему:

Т е о р е м а I [2]. Пусть ω_1 и ω_2 - две инфинитезимальные связности на главном расслоении $P(M,G)$, $\varphi: G\to G$ - эндоморфизм структурной группы. Связности ω_1 и ω_2 φ-сопряжены (или, точнее, ω_2 φ-сопряжена с ω_1) тогда и только тогда, когда существует такое редуцированное подрасслоение $P_0(M,H)\subset P(M,G)$, где $H=G^{\varphi}$ - подгруппа неподвижных элементов эндоморфизма φ, что для всякого локального сечения $\sigma: \mathcal{U}\to P_0$

$$\sigma^*\omega_2 = d\varphi\cdot\sigma^*\omega_1. \qquad (1)$$

Известно [4], что существование редукции $P_0(M,H)$ эквивалентно существованию φ-структуры или, по терминологии [5], редуцирующего φ-эндоморфизма f расслоения $P(M,G)$. Напомним, что гомоморфизм f расслоения $P(M,G)$ называется φ-эндоморфизмом, если $\pi\circ f=\pi$ и для $\forall p\in P, \forall g\in G$

$$f(pg)=f(p)\,\varphi(g), \qquad (2)$$

причем задание такого φ-эндоморфизма равносильно

заданию дифференцируемого отображения $\mu: P\to G$, удовлетворяющего условиям

$$f(p)=p\cdot\mu(p), \qquad (3)$$

$$\mu(pg)=g^{-1}\cdot\mu(p)\cdot\varphi(g). \qquad (4)$$

Группу G можно превратить в левое G-пространство, введя следующее действие G на самой себе:

$$g: G\to G: h\mapsto gh\varphi(g^{-1}). \qquad (5)$$

Орбиту произвольного фиксированного элемента $g_0\in G$ при этом действии обозначим Σ_{g_0}. Множество Σ_{g_0} наделяется структурой подмногообразия, диффеоморфного G/H, где

$$H=\{g\in G\mid gg_0\varphi(g^{-1})=g_0\} - \qquad (6)$$

группа инвариантности элемента g_0 при действии (5).

О п р е д е л е н и е [4],[5]. Пусть f - φ-эндоморфизм расслоения $P(M,G)$. Если отображение $\mu: P\to G$, заданное условиями (3) и (4), осуществляет дифференцируемое отображение всего пространства P в одну орбиту Σ_{g_0}, то φ-эндоморфизм f называется φ-структурой, или редуцирующим φ-эндоморфизмом.

Т е о р е м а 2 [4]. Задание редуцирующего φ-эндоморфизма f главного расслоения $P(M,G)$ эквивалентно существованию редуцированного подрасслоения $P_0(M,H)$ со структурной группой H вида (6) и пространством расслоения

$$P_0=\{p\in P\mid f(p)=pg_0\}. \qquad (7)$$

З а м е ч а н и е. Случай подрасслоения, заданного условиями (6) и (7), можно свести к более простому. Возьмем $f'=R_{g_0^{-1}}\circ f$ и $\varphi'=\mathcal{J}(g_0)\circ\varphi$. Очевидно, что определенное таким образом $\varphi': G\to G$ будет эндоморфизмом, а $f': P\to P$ - φ'-эндоморфизмом. Кроме того, мы видим, что

$$P_0=\{p\in P\mid f'(p)=p\},\ H=G^{\varphi}=\{g\in G\mid g\varphi'(g^{-1})=e\}, \qquad (8)$$

значит, согласно теореме 2, φ'-эндоморфизм f' будет редуцирующим, причем соответствующее $g_0'=e\in G$.

Учитывая это замечание, ограничимся в дальнейшем только такими редуцирующими φ-эндоморфизмами, что соответствующие им подрасслоения задаются множествами неподвижных точек P и G по формулам (8).

Вернемся теперь к рассмотрению φ-сопряженных связностей на $P(M,G)$. По теореме 2 задание подрасслоения $P_0(M,H)$ из теоремы 1 эквивалентно существованию редуцирующего φ-эндоморфизма f такого, что $P_0=\{p\in P \mid f(p)=p\}$. Условие (I) легко приводится к виду $\omega_2|_{P_0}=d\varphi\circ\omega_1|_{P_0}$ (для вертикальных векторов оно проверяется очевидным образом). Поскольку на P_0 у нас $f|_{P_0}=\mathrm{Id}$, то можно записать

$$f^*\omega_2|_{P_0}=d\varphi\circ\omega_1|_{P_0}. \tag{9}$$

Посмотрим, какая связь существует между ω_1 и ω_2 на всем P. Возьмем $\forall X_p\in TP$ и такие гладкие кривые $\gamma(t)\subset P$, $\gamma_0(t)\subset P_0$ и $g(t)\subset G$, что $\dot\gamma(0)=X_p$, $\gamma_0(0)=p_0=P_0$, $\dot\gamma_0(0)=X_{p_0}\in TP_0$ и $\gamma(t)=\gamma_0(t)\,g(t)$. Применяя к последнему равенству формулу Лейбница, получаем

$$X_p=dR'_g X_{p_0}+\widetilde{(g^{-1}\dot g)}|_p=dR'_g X_{p_0}+\widetilde{\theta(\dot g)|_p}, \tag{10}$$

где R'_g -правое действие G на P, $g=g(0)$, $\widetilde{g^{-1}\dot g}$ –фундаментальное векторное поле на P, соответствующее вектору $dL_{g(0)^{-1}}\frac{dg}{dt}|_{t=0}\in\mathfrak{g}$, $L_g\colon G\to G: h\mapsto gh$, θ - каноническая 1-форма на G.

Отметим, что поскольку $\mu(p_0)=e$, то

$$\mu(p)=\mu(p_0g)=g^{-1}\mu(p_0)\varphi(g)=g^{-1}\varphi(g). \tag{11}$$

С учетом равенств (9)-(11) и того, что $\varphi\circ L_g=L_{\varphi(g)}\circ\varphi$, достаточно простыми вычислениями можно показать, что

$$d\varphi\circ\omega_1(X_p)=Ad(\mu(p)^{-1})\circ\omega_2(X_p)-Ad(\mu(p)^{-1})\circ dL_{g^{-1}}(\dot g)+dL_{\varphi(g^{-1})}\cdot d\varphi(\dot g). \tag{12}$$

С другой стороны, с учетом того, что $f(\gamma(t))=\gamma(t)\cdot\mu(\gamma(t))$ и $df(X_p)=dR'_{\mu(p)}X_p+\widetilde{\theta\left[\frac{d(\mu\circ\gamma)}{dt}|_{t=0}\right]}|_{f(p)}$ вычисляем $f^*\omega_2(X_p)$. Поскольку $\mu\circ\gamma(t)=g(t)^{-1}\varphi(g(t))$, то $\frac{d(\mu\circ\gamma)}{dt}|_{t=0}=-dR_{\mu(p)}\circ dL_{g^{-1}}(\dot g)+dL_{g^{-1}}\cdot d\varphi(\dot g)$.

Тогда

$$f^*\omega_2(X_p)=Ad(\mu(p)^{-1})\,\omega_2(X_p)-dL_{\mu(p)^{-1}}\circ dR_{\mu(p)}\circ dL_{g^{-1}}(\dot g)+dL_{\varphi(g^{-1})g}\circ dL_{g^{-1}}\circ d\varphi(\dot g). \tag{I3}$$

Сравнивая (I2) и (I3), видим, что на всем P имеем $f^*\omega_2=d\varphi\circ\omega_1$, откуда вытекает следующая

Т е о р е м а 3. Связности ω_1 и ω_2 на $P(M,G)$ - сопряжены тогда и только тогда, когда связность ω_2 является гомоморфным образом связности ω_1 при действии соответствующего редуцирующего φ-эндоморфизма f.

При рассмотрении с локальной точки зрения для случая инволютивного автоморфизма $\varphi\colon G\to G$ задание φ-сопряженных связностей как гомоморфных давалось в [6]. В данном случае, однако, отношение сопряженности не симметрично, то есть из того, что ω_2 φ-сопряжена с ω_1 не следует, что ω_1 φ-сопряжена с ω_2; кроме того, отмечается роль редуцируемости соответствующего эндоморфизма f. Практически именно такие связности рассматривались в [4], [7].

Список литературы

I. Ведерников В.И. Симметрические пространства. Сопряженные связности, как нормализованная связь.-Тр. Геометр. семинара. ВИНИТИ, I966, вып. I, с.63–88.

2. Gancarzewicz J. Connexions conjugées. – Colloquium math., 1972, vol. 26, p. 193–208.

3. Gancarzewicz J. Mixed covariant derivative and conjugate connections. – Ann. pol. math., 1976, vol. 32, N3, p. 235–271.

4. Ведерников В.И. φ-структуры в главных G-расслоениях.-Докл. АН БССР, I973, т.27, № 8, с.689–69I.

5. Кононов С.Г. G-структуры, порожденные эндоморфизмами.-Весц АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, I974, 2, с.4I–44

6. Ведерников В.И. Симметрические пространства и сопряженные связности.-Уч. зап. Казанского ун-та, I965, I25, № I, с.7–59.

7. Ведерников В.И. φ-структуры и сопряженные связности в главных G-расслоениях.-Тр. семинара кафедры геометрии. Казань, I974, Вып. УII, с.20–27.