Итоги науки и техн. Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР. М., 1979. Т. 9. 246 с.

4. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Моск. матем. о-ва. М., 1953. Т. 2. С. 275 – 382.

5. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. 432 с.

6. *Столяров А.В.* Линейные связности на распределениях конформного пространства // Изв. вузов. Математика. 2001. №3. С. 60 – 72.

T. Andreeva

THE CONJUGATE AFFINE CONNECTIONS
ON NORMALLY EQUIPPED HYPERSURFACE
IN A CONFORMAL SPACE

In the work the affine connections on normally equipped hypersurface in conformal space are investigated.

УДК 513.82

М.Б. Банару
(Смоленский гуманитарный университет)

О СЛАБО КОСИМПЛЕКТИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ 6-МЕРНЫХ КЕЛЕРОВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБРЫ ОКТАВ

Рассматриваются 6-мерные подмногообразия алгебры Кэли, на которых 3-векторные произведения индуцируют келерову структуру. Получены структурные уравнения почти контактной метрической структуры на гиперповерхностях таких подмногообразий. Показано, что типовое число слабо косимплектических гиперповерхностей 6-мерных подмногообразий алгебры октав не превосходит единицы.

1. На всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия естественным образом индуцируется почти контактная метрическая структура. Это – одна из причин важной роли почти эрмитовых многообразий в контактной геометрии и теоретической физике.

В настоящей заметке рассматриваются почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли. Отметим, что 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры октав изучали такие известные геометры, как Е. Калаби, А. Грей, Р. Брайант (США), К. Секигава (Япония), В.Ф. Кириченко (Россия). Не вдаваясь в подробности столь обширной тематики, выделим статью [1], содержащую полную классификацию 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли. Данная работа является продолжением исследований автора, рассматривавшего ранее 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры октав (см., например, [2 – 5]).

2. Напомним, что почти эрмитовой (almost Hermitian, AH-) структурой на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $(J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$, где J – почти комплексная структура, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ – риманова метрика. При этом J и g должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Пусть $\mathbf{O} \equiv R^8$ – алгебра Кэли. Как известно [6], в ней определены два неизоморфных 3-векторных произведения

$$P_1(X, Y, Z) = -X(\overline{Y}Z) + \langle X, Y\rangle Z + \langle Y, Z\rangle X - \langle Z, X\rangle Y;$$

$$P_2(X, Y, Z) = -(X\overline{Y})Z + \langle X, Y\rangle Z + \langle Y, Z\rangle X - \langle Z, X\rangle Y.$$

Здесь $X, Y, Z \in \mathbf{O}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в $\mathbf{O}$, $X \to \overline{X}$ – оператор сопряжения в $\mathbf{O}$. При этом любое другое 3-векторное произведение в алгебре октав изоморфно одному из вышеприведенных.

Если $M^6 \subset \mathbf{O}$ – 6-мерное ориентируемое подмногообразие, то на нем индуцируется почти эрмитова структура $(J_\alpha, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, определяемая в каждой точке соотношением

$$J_\alpha(X) = P_\alpha(X, e_1, e_2), \quad \alpha = 1, 2,$$

где $\{e_1, e_2\}$ – произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 пространства в точке p, $X \in T_p(M^6)$ [6]. Подмногообразие называется келеровым, если

$$\nabla J = 0,$$

где ∇ – риманова связность метрики на M^6.

Точка $p \in M^6$ называется общей, если

$$e_0 \notin T_p(M^6),$$

где e_0 – единица алгебры Кэли. Подмногообразие, состоящее только из общих точек, называется подмногообразием общего типа [1]. Все рассматриваемые далее подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ подразумеваются подмногообразиями общего типа.

3. Пусть N – ориентируемая гиперповерхность келерова подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$, σ – вторая квадратичная форма ее погружения в M^6. Как известно, под почти контактной метрической структурой на N понимают такую систему $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ тензорных полей, где ξ – векторное поле, η – ковекторное поле, Φ – поле тензора типа (1,1), g – риманова метрика. При этом

$$\eta(\xi) = 1, \Phi(\xi) = 0, \eta \circ \Phi = 0, \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta,$$

$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \aleph(N).$$

Воспользуемся первой группой структурных уравнений почти контактной метрической структуры на гиперповерхности эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ [7]:

$$d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta}{}_\gamma \omega^\gamma \wedge \omega_\beta + \left(\sqrt{2}B^{\alpha 3}{}_\beta + i\sigma^\alpha_\beta\right)\omega^\beta \wedge \omega +$$

$$+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B^{\alpha\beta}{}_3 + i\sigma^{\alpha\beta}\right)\omega_\beta \wedge \omega,$$

$$d\omega_\alpha = -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta}{}^\gamma \omega_\gamma \wedge \omega^\beta + \left(\sqrt{2}B_{\alpha 3}{}^\beta - i\sigma_\alpha^\beta\right)\omega_\beta \wedge \omega + \\ + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B_{\alpha\beta}{}^3 - i\sigma_{\alpha\beta}\right)\omega^\beta \wedge \omega, \tag{1}$$

$$d\omega = \left(\sqrt{2}B^{3\alpha}{}_\beta - \sqrt{2}B_{3\beta}{}^\alpha - 2i\sigma_\beta^\alpha\right)\omega^\beta \wedge \omega_\alpha + \left(B_{3\beta}{}^3 + i\sigma_{3\beta}\right)\omega \wedge \omega^\beta + \\ + \left(B^{3\beta}{}_3 - i\sigma_3^\beta\right)\omega \wedge \omega_\beta,$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$; a, b, c = 1, 2, 3; $\left\{B^{ab}{}_c\right\}$ и $\left\{B_{ab}{}^c\right\}$ – компоненты виртуальных тензоров Кириченко. Поскольку эрмитово многообразие является келеровым тогда и только тогда, когда [8]

$$B^{ab}{}_c = B_{ab}{}^c = 0,$$

получаем следующий результат.

Теорема 1. *Первая группа структурных уравнений почти контактной метрической структуры на гиперповерхности 6-мерного келерова подмногообразия алгебры Кэли имеет вид:*

$$d\omega^\alpha = \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + i\sigma_\beta^\alpha \omega^\beta \wedge \omega + i\sigma^{\alpha\beta}\omega_\beta \wedge \omega, \\ d\omega_\alpha = -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta - i\sigma_\alpha^\beta \omega_\beta \wedge \omega - i\sigma_{\alpha\beta}\omega^\beta \wedge \omega, \tag{2} \\ d\omega = -2i\sigma_\beta^\alpha \omega^\beta \wedge \omega_\alpha + i\sigma_{3\beta}\omega \wedge \omega^\beta - i\sigma_3^\beta \omega \wedge \omega_\beta.$$

Отметим, что случай, когда почти контактная метрическая структура является косимплектической, изучен ранее [2; 4]. Этому случаю соответствуют следующие структурные уравнения:

$$d\omega^\alpha = \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta, \;\; d\omega_\alpha = -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta, \;\; d\omega = 0.$$

Однако, как видно из (2), почти контактная метрическая структура на гиперповерхности $N \subset M^6$ не обязана быть косимплектической. Напомним, что почти контактная метрическая структура называется слабо косимплектической [9], если

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = 0, \nabla_X(\eta)Y + \nabla_Y(\eta)X = 0, \qquad X, Y \in \aleph(N).$$

Наконец, отметим, что под типовым числом гиперповерхности риманова многообразия понимают ранг ее второй квадратичной формы (см., напр., [7] или [10]).

Поскольку все келеровы многообразия входят в класс приближенно келеровых многообразий, используя [9], получаем следующий результат о слабо косимплектических гиперповерхностях 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав.

Теорема 2. *Типовое число всякой слабо косимплектической гиперповерхности 6-мерного келерова подмногообразия алгебры Кэли не превосходит единицы.*

Список литературы

1. *Кириченко В.Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Мат. 1980. №8. С. 32 – 38.

2. *Banaru M.* Two theorems on cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Kählerian submanifolds of Cayley algebra // Bul. Stin. Univ. «Politehnica». Math.-Phys. Timisoara, 2001. T. 46(60). №2. P. 13 – 17.

3. *Banaru M.* On spectra of some tensors of six-dimensional Kählerian submanifolds of Cayley algebra // Studia Univ. «Babes-Bolyai». Math. Cluj-Napoca, 2002. 47. №1. P. 11 – 17.

4. *Банару М.Б.* О косимплектических гиперповерхностях 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли // Изв. вузов. Мат. 2003. №7. С. 59 – 63.

5. *Банару М.Б.* О почти контактных метрических структурах на гиперповерхностях 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав // Актуальные проблемы математики, физики, информатики и методики их преподавания. М: Прометей, 2003. С. 40 – 41.

6. *Gray A.* Vector cross products on manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 141. P. 465 – 504.

7. *Банару М.Б.* Две теоремы о косимплектических гиперповерхностях 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Мат. 2002. №1. С. 9 – 12.

8. *Banaru M.* A new characterization of the Gray-Hervella classes of almost Hermitian manifolds // 8th International Conference on Differential Geometry and Its Applications. Opava, 2001. P. 4.

9. *Банару М.Б.* О типовом числе слабо косимплектических гиперповерхностей приближенно келеровых многообразий // Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т. 8. Вып. 2. С. 357 – 364.

10. *Kurihara H.* The type number on real hypersurfaces in a quaternionic space form // Tsukuba Journal Math. 2000. V. 24. №1. P. 127 – 132.

M. Banaru

ON NEARLY COSYMPLECTIC STRUCTURES
ON HYPERSURFACES OF SIX-DIMENSIONAL
KAHLERIAN SUBMANIFOLDS OF THE OCTAVE ALGEBRA

Six-dimensional submanifolds of Cayley algebra equipped by Kahlerian structures induced by means of three-fold vector cross products are considered. The Cartan structural equations of the almost contact metric structures on hypersurfaces of such submanifolds are obtained. It is proved that the type number of the nearly cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Kahlerian submanifolds of the octave algebra is at most one.

УДК 514.75

О.О. Белова
(Калининградский государственный университет)

ПУЧОК СВЯЗНОСТЕЙ 3-го ТИПА, ИНДУЦИРОВАННЫЙ ОСНАЩЕНИЕМ БОРТОЛОТТИ МНОГООБРАЗИЯ ГРАССМАНА

В n-мерном проективном пространстве рассмотрено многообразие Грассмана $V=Gr(m,n)$ m-мерных плоскостей L_m. С ним ассоциировано главное расслоение, в котором исследуется групповая связность. Осуществлено оснащение Бортолотти. Доказано, что данное оснащение индуцирует связности трех типов, причем связность 1-го типа является средней по отношению к связностям двух остальных типов. По данной зависимости введен пучок связностей 3-го типа, в котором выделена единственная связность.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A,A_I\}$ $(I,\ldots=\overline{1,n})$ с деривационными формулами