5. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. 432 с.
6. *Столяров А.В.* О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы // Изв. вузов. Мат. 1975. № 10. С. 97-99.
7. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения *m*-мерных линейных элементов // Пробл. геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т. 7. С. 117-151.
8. *Столяров А.В.* Двойственные линейные связности на оснащенных многообразиях пространства проективной связности // Там же, 1977. Т. 8. С. 25-46.
9. *Столяров А.В.* Дифференциальная геометрия полос // Там же, 1978. Т.10. С.25-54.
10. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. 432 с.
11.*Чакмазян А.В.* Двойственная нормализация // ДАН Арм.ССР. 1959. №4. С.151-157.
12.*Cartan E.* Leçons sur la théorie des espaces á connexion proective. Paris, 1937.
13.*Cartan E.* Les espaces á connexion projective // Тр. семин. по векторному и тензорному анализу / М.: Изд-во Моск. ун-та, 1937. Вып. 4. С. 147-159.
14.*Mihăilescu T.* Geometrie differentiala projectiva. Bucureşti Acad. RPR, 1958. 494 p.

A.V. S t o l y a r o v

CONTRACTIONS OF THE PROJECTIVE CONNECTION SPACES INDUCED ON AN EQUIPPED HYPERSTRIP

Geometries of two equipments (in A.P.Norden′s and E.Cartan′s sense) of m-dimensional reqular hiperstrip, immersed in the n-dimensional projective space (m<n<1) are investigated by construstion of fields of geometric enveloped by fundamental and equipping objects. The results are obtained with application of the theory of connections in fiber spaces in Laptev′s form.

УДК 514.75

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНЕСЕНИЯ НОРМАЛИ ПОВЕРХНОСТИ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

А.Н. С ы р о к в а ш и н а

(*Калининградский государственный университет*)

В аффинном пространстве способом Лаптева исследуется групповая связность в расслоении, ассоциированном с поверхностью как многообразием касательных плоскостей. Кривизна связности является тензором, содержащим два подтензора касательной и нормальной линейных связностей. Произведено оснащение поверхности, состоящее в задании поля нормалей. Введено понятие ковариантного дифференциала и ковариантных производных оснащающего квазитензора относительно групповой связности. Ковариантные производные оснащающего квазитензора образуют тензор. Показано, что оснащение поверхности индуцирует два типа групповой связности в ассоциированном расслоении. Первая связность характеризуется невозможностью параллельного перенесения нормали. Введено понятие особого поля нормалей. Во второй связности нормаль неособого поля переносится абсолютно параллельно при произвольном смещении.

Отнесем n-мерное аффинное пространство A_n к подвижному реперу $\{\vec{A}, \vec{e}_I\}$, перемещения которого задаются формулами

$$d\vec{A} = \omega^I \vec{e}_I,\ d\vec{e}_I = \omega_I^J \vec{e}_J \quad (I, J, K = \overline{1, n}). \tag{1}$$

Базисные формы ω^I, ω_I^J аффинной группы GA(n), dimGA(n)=n(n+1), действующей в пространстве A_n, удовлетворяют уравнениям Картана

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I,\ \ D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I. \tag{2}$$

В аффинном пространстве A_n рассмотрим m-мерную поверхность S_m ($1 \le m < n$) общего вида и произведем специализацию подвижного репера $R=\{A, e_i, e_\alpha\}$ ($i,j,k,...=\overline{1,m}$; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = \overline{m+1, n}$), помещая вершину A в текущую точку поверхности S_m, а векторы e_i - в соответствующую касательную плоскость T_m. Система дифференциальных уравнений поверхности S_m в репере R имеет вид:

$$\omega^\alpha = 0,\ \ \omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega^j. \tag{3}$$

Замыкая первую подсистему, получим

$$\Lambda_{[ij]}^\alpha = 0. \tag{4}$$

Продолжая вторую подсистему, найдем

$$\Delta\Lambda_{ij}^\alpha = \Lambda_{ijk}^\alpha \omega^k \ \Leftrightarrow\ \Delta\Lambda_{ij}^\alpha \equiv 0,$$

где Δ - дифференциальный оператор, действующий по закону

$$\Delta\Lambda_{ij}^\alpha = d\Lambda_{ij}^\alpha - \Lambda_{ik}^\alpha \omega_j^k - \Lambda_{kj}^\alpha \omega_i^k + \Lambda_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha.$$

Функции Λ_{ij}^α - составляют фундаментальный тензор поверхности S_m.

С поверхностью S_m ассоциируется главное расслоение $G(S_m)$ со структурными уравнениями

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \tag{5}$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i, \tag{6}$$

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega^k \wedge \omega_{\beta k}^\alpha, \tag{7}$$

$$D\omega_\alpha^i = \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^i + \omega_\alpha^j \wedge \omega_j^i, \tag{8}$$

где

$$\omega_{jk}^i = \Lambda_{kj}^\alpha \omega_\alpha^i,\ \ \omega_{\beta k}^\alpha = -\Lambda_{ik}^\alpha \omega_\beta^i. \tag{9}$$

Базой главного расслоения $G(S_m)$ является поверхность S_m, а типовым слоем - подгруппа стационарности $G \subset GA(n)$ центрированной касательной плоскости T_m, причем $\dim G=(n-m)^2+nm$. Расслоение $G(S_m)$ содержит два подрасслоения со структурными уравнениями (5),(6) и (5),(7) касательных и нормальных реперов, типовыми слоями которых являются линейная группа $GL(m)$, действующая в центрированной касательной плоскости T_m, и факторгруппа$GL(n-m)$, действующая в нормальном факторпространстве $L_{n-m}=A_n/T_m$.

Групповую связность в главном расслоении $G(S_m)$ зададим [1] с помощью форм

$$\tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k,\ \tilde{\omega}^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta - \Gamma^\alpha_{\beta i}\omega^i,\ \tilde{\omega}^i_\alpha = \omega^i_\alpha - \Gamma^i_{\alpha j}\omega^j. \tag{10}$$

Компоненты объекта связности $\Gamma = (\Gamma^i_{jk}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \Gamma^i_{\alpha j})$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jkl}\omega^l,\ \Delta\Gamma^\alpha_{\beta i} + \omega^\alpha_{\beta i} = \Gamma^\alpha_{\beta ij}\omega^j, \tag{11}$$

$$\Delta\Gamma^i_{\alpha j} - \Gamma^i_{jk}\omega^k_\alpha + \Gamma^\beta_{\alpha j}\omega^i_\beta = \Gamma^i_{\alpha jk}\omega^k. \tag{12}$$

Функции Γ^i_{jk}, $\Gamma^\alpha_{\beta i}$ образуют подобъекты касательной и нормальной линейных связностей. С учетом (11), (12) получаем структурные уравнения для форм связности (10)

$$D\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l_j,\ D\tilde{\omega}^\alpha_\beta = \tilde{\omega}^\gamma_\beta \wedge \tilde{\omega}^\alpha_\gamma + R^\alpha_{\beta ij}\omega^i \wedge \omega^j, \tag{13}$$

$$D\tilde{\omega}^i_\alpha = \tilde{\omega}^\beta_\alpha \wedge \tilde{\omega}^i_\beta + \tilde{\omega}^j_\alpha \wedge \tilde{\omega}^i_j + R^i_{\alpha jk}\omega^j \wedge \omega^k,$$

где компоненты объекта кривизны R=$\{R^i_{jkl}, R^\alpha_{\beta ij}, R^i_{\alpha jk}\}$ групповой связности имеют вид:

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^m_{j[k}\Gamma^i_{|m|l]},\ R^\alpha_{\beta ij} = \Gamma^\alpha_{\beta[ij]} - \Gamma^\gamma_{\beta[i}\Gamma^\alpha_{|\gamma|j]}, \tag{14}$$

$$R^i_{\alpha jk} = \Gamma^i_{\alpha[jk]} + \Gamma^i_{l[j}\Gamma^l_{|\alpha|k]} - \Gamma^\beta_{\alpha[j}\Gamma^i_{|\beta|k]}. \tag{15}$$

Продолжая уравнения (11), (12), получим

$$\begin{gathered}\Delta\Gamma^i_{jkl} - \Gamma^i_{jm}\omega^m_{kl} - \Gamma^i_{km}\omega^m_{jl} + \Gamma^m_{jk}\omega^i_{lm} + \Lambda^\alpha_{jkl}\omega^i_\alpha \equiv 0,\\ \Delta\Gamma^\alpha_{\beta ij} - \Gamma^\alpha_{\beta k}\omega^k_{ij} - \Gamma^\alpha_{\gamma i}\omega^\gamma_{\beta j} + \Gamma^\gamma_{\beta i}\omega^\alpha_{\gamma j} - \Lambda^\alpha_{ijk}\omega^k_\beta \equiv 0,\\ \Delta\Gamma^i_{\alpha jk} - \Gamma^i_{\alpha l}\omega^l_{jk} + \Gamma^l_{\alpha j}\omega^i_{kl} - \Gamma^i_{\beta j}\omega^\beta_{\alpha k} - \Gamma^i_{jkl}\omega^l_\alpha + \Gamma^\beta_{\alpha jk}\omega^i_\beta \equiv 0.\end{gathered} \tag{16}$$

Из соотношений (11), (12), (16) с помощью форм (14), (15) найдем дифференциальные сравнения для компонент объекта кривизны R групповой связности

$$\Delta R^i_{jkl} \equiv 0,\ \Delta R^\alpha_{\beta ij} \equiv 0,\ \Delta R^i_{\alpha jk} - R^i_{jkl}\omega^l_\alpha + R^\beta_{\alpha jk}\omega^i_\beta \equiv 0. \tag{17}$$

Теорема 1. Объект кривизны R групповой связности является тензором, содержащим два подтензора касательной и нормальной линейных связностей R^i_{jkl}, $R^\alpha_{\beta ij}$.

Осуществим оснащение поверхности S_m полем (n-m)-плоскости - нормали N_{n-m}:$T_m+N_{n-m}=A_n$. Плоскость N_{n-m} определим совокупностью векторов $\vec{E}_\alpha = \vec{e}_\alpha + \lambda^i_\alpha\vec{e}_i$, причем

$$\Delta\lambda^i_\alpha + \omega^i_\alpha = \lambda^i_{\alpha j}\omega^j. \tag{18}$$

Продолжая эти уравнения, найдем

$$\Delta\lambda^i_{\alpha j} + \lambda^k_\alpha \omega^i_{kj} - \lambda^i_\beta \omega^\beta_{\alpha j} \equiv 0\,. \qquad (19)$$

Вводя формы связности (10) в дифференциальные уравнения (18), получим $\nabla\lambda^i_\alpha = \nabla_j \lambda^i_\alpha \omega^j$, где выражения

$$\nabla\lambda^i_\alpha = d\lambda^i_\alpha - \lambda^i_\beta \tilde{\omega}^\beta_\alpha + \lambda^j_\alpha \tilde{\omega}^i_j + \tilde{\omega}^i_\alpha\,, \qquad (20)$$

$$\nabla_j \lambda^i_\alpha = \lambda^i_\beta \Gamma^\beta_{\alpha j} - \lambda^k_\alpha \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{\alpha j} + \lambda^i_{\alpha j} \qquad (21)$$

называются [2, с.45] ковариантным дифференциалом и ковариантными производными оснащающего квазитензора λ^i_α. Воспользовавшись формулами (11), (12), (18) можно показать, что $\Delta\nabla\lambda^i_\alpha \equiv 0$, т.е. справедлива

Теорема 2. Ковариантные производные квазитензора λ^i_α образуют тензор.

Найдем внешний дифференциал от ковариантного дифференциала $\nabla\lambda^i_\alpha$ с помощью формул (13)

$$D\nabla\lambda^i_\alpha = -\nabla\lambda^i_\beta \wedge \tilde{\omega}^\beta_\alpha + \nabla\lambda^j_\alpha \wedge \tilde{\omega}^i_j + S^i_{\alpha jk}\omega^j \wedge \omega^k\,,$$

где

$$S^i_{\alpha jk} = R^i_{\alpha jk} - \lambda^i_\beta R^\beta_{\alpha jk} - \lambda^l_\alpha R^i_{jkl}\,.$$

Подействовав оператором Δ на функции $S^i_{\alpha jk}$ и воспользовавшись дифференциальными сравнениями (17), получим $\Delta S^i_{\alpha jk} \equiv 0$. Значит, $S^i_{\alpha jk}$ - тензор. Из уравнений (21) видно, что если $S^i_{\alpha jk} \equiv 0$, то система $\nabla\lambda^i_\alpha = 0$ вполне интегрируема.

Фундаментальный тензор $\Lambda = \{\Lambda^\alpha_{ij}\}$ и оснащающий квазитензор $\lambda = \{\lambda^i_\alpha\}$ позволяют охватить объект связности Г двумя способами. В первом случае, рассмотрев формулы (11), (12) и входящие в них выражения (9), получим охват объекта связности $\overset{1}{\Gamma} = \{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i}, \overset{1}{\Gamma}{}^i_{\alpha j}\}$ по формулам

$$\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk} = \Lambda^\alpha_{jk}\lambda^i_\alpha\,,\ \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i} = -\Lambda^\alpha_{ij}\lambda^j_\beta\,, \qquad (22)$$

$$\overset{1}{\Gamma}{}^i_{\alpha j} = -\Gamma^i_{jk}\lambda^k_\alpha + \Gamma^\beta_{\alpha j}\lambda^i_\beta + \Lambda^\beta_{jk}\lambda^k_\alpha \lambda^i_\beta\,. \qquad (23)$$

Во втором случае, учитывая теорему 2 и полагая $\nabla_j\lambda^i_\alpha = 0$ в формуле (20), найдем второй охват $\overset{2}{\Gamma} = \{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i}, \overset{2}{\Gamma}{}^i_{\alpha j}\}$ по формулам (22) и следующей $\overset{2}{\Gamma}{}^i_{\alpha j} = -\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}\lambda^k_\alpha + \overset{0}{\Gamma}{}^\beta_{\alpha j}\lambda^i_\beta + \lambda^i_{\alpha j}$. Таким образом, доказана

Теорема 3. Оснащение поверхности S_m полем нормалей N_{n-m} индуцирует два типа групповой связности в ассоциированном расслоении $G(S_m)$ с объектами $\overset{1}{\Gamma}$ и $\overset{2}{\Gamma}$.

Найдем дифференциалы векторов $\vec{E}_\alpha = \vec{e}_\alpha + \lambda^i_\alpha \vec{e}_i$ с помощью объекта связности $\overset{1}{\Gamma}$:

$$d\vec{E}_\alpha = \overset{1}{\nabla}\lambda^i_\alpha \vec{e}_i + (\omega^\beta_\alpha + \lambda^i_\alpha \omega^\beta_i)\vec{E}_\beta .$$

Рассмотрим, проходящую через точку A линию $\rho: A \in \rho \subset S_m$ с дифференциальными уравнениями $\omega^i = \rho^i \omega$. Уравнения $\nabla \lambda^i_\alpha = 0$ вдоль линии ρ эквивалентны системе линейных однородных уравнений $\overset{1}{\nabla}_j \lambda^i_\alpha \rho^j = 0$ с m неизвестными ρ^j и m(n-m) уравнениями, имеющей в общем случае тривиальное решение $\rho^j = 0$, т.е. линия ρ вырождается в точку A. Следовательно, справедлива

Теорема 4. Нормаль N_{n-m} нельзя переносить параллельно в связности 1-го типа.

Аналогично находим дифференциалы тех же векторов с помощью объекта связности $\overset{2}{\Gamma}$:

$$d\vec{E}_\alpha = \overset{2}{\nabla}\lambda^i_\alpha \vec{e}_i + (\lambda^i_{\alpha j} - \Lambda^\beta_{jk}\lambda^k_\alpha \lambda^i_\beta)\omega^j \vec{e}_i + (\omega^\beta_\alpha + \lambda^i_\alpha \omega^\beta_i)\vec{E}_\beta \quad (\overset{2}{\nabla}\lambda^i_\alpha = 0).$$

Дифференциальные сравнения для функций $\Lambda^\beta_{jk}\lambda^k_\alpha \lambda^i_\beta$ совпадают с дифференциальными сравнениями для пфаффовых производных $\lambda^i_{\alpha j}$ (19). Поэтому можно положить

$$\lambda^i_{\alpha j} = \Lambda^\beta_{jk}\lambda^k_\alpha \lambda^i_\beta . \tag{24}$$

Будем говорить об особом поле нормалей N_{n-m} при выполнении равенств (24).

Теорема 5. Нормаль N_{n-m} неособого поля при произвольном смещении переносится абсолютно параллельно в связности $\overset{2}{\Gamma}$.

При выполнении (24) дифференциальные уравнения для оснащающих векторов $\vec{E}_\alpha$ примут вид: $d\vec{E}_\alpha = \overset{2}{\nabla}\lambda^i_\alpha \vec{e}_i + (\omega^\beta_\alpha + \lambda^i_\alpha \omega^\beta_i)\vec{E}_\beta$ $(\overset{2}{\nabla}\lambda^i_\alpha = 0)$. Следовательно, справедлива

Теорема 6. Нормаль N_{n-m} особого поля в связности $\overset{2}{\Gamma}$ переносить параллельно нельзя.

Библиографический список

1. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. о-ва. 1953. Т.2. С.275-382.

2. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998. 82 с.

A.N. S y r o k v a s h i n a

PARALLEL DISPLACEMENTS OF NORMAL OF SURFACE
IN THE AFFINE SPACE

In the affine space by means of Laptev′s way group connection is investigated in the bundle, associated with surface as manifold of tangent planes. The curvature of the connection is tensor, containing two subtensors of tangent and normal linear connec-

tions. Equipment of the surface, consisting in the giving of normals field, is made. The notion of covariant differential and covariant derivatives of equipping quasitensor in the group connection is introduced. Covariant derivatives of equipping quasitensor are tensor. It is shown, that equipment of the surface induces two types of group connection in the associated bundle. First connection is characterised by impossibility of paralled displacement of the normal. The notion of special field of normals is introduced. In the second connection normal of non-special field displaces absolutely parallel under arbitrary movement.