Подставляя эти значения в последнюю группу уравнений (13), получим

$$\omega^0_k \equiv 0 . \qquad (15)$$

Отметим, что при выполнении условий (14), (15) системы уравнений (8) и (13) совпадают.

Произведем нормализацию 2-го рода поверхности X_m, т.е. к каждой ее точке A_0 присоединим нормаль 2-го рода А.П.Нордена [2] – плоскость N_{m-1}, принадлежащую касательной плоскости T_m и не проходящую через точку касания A_0. Плоскость N_{m-1} зададим совокупностью точек $B_i = A_i + \Gamma_i A_0$. Осуществим дополнительную канонизацию репера $\{A_J\}$, помещая вершины A_i на нормаль 2-го рода N_{m-1}, тогда условия (14), (15) будут выполнены и объект $\Pi^{i'}_{jk}$ можно отождествить с объектом $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{jk})$. Заметим, что в силу сравнений (15) расслоение (5), (12) сокращается, поэтому объектом связности становится лишь подобъект Π^i_{jk} объекта $\Pi^{i'}_{jk}$.

Список литературы

1. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. – Проблемы геометрии, 1979, т.9.

2. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М., 1976.

3. Cartan E. Les espaces a connexion projective. Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу, 1937, вып.4, с.147–159.

УДК 514.75

Н.М.Ш е й д о р о в а

К ГЕОМЕТРИИ ДВУХСОСТАВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ $\mathcal{H}^r_m \subset P_n$.

Двухсоставным распределением $\mathcal{H}^r_m$ $(r<m<n-1)$ назовем пару распределений, состоящую из базисного распределения 1-го рода $\mathcal{H}_r$ r-мерных плоскостей Π_r и оснащающего распределения 1-го рода $\mathcal{H}_m$ m-мерных плоскостей Π_m, причем $\Pi_r(A) \subset \Pi_m(A)$ в каждом центре A распределения $\mathcal{H}^r_m$.

На протяжении всего изложения индексы пробегают следующие значения:

$$\bar{I}, \bar{J}, \bar{K} = \overline{0,n}\,; \quad I, J, K = \overline{1,n}\,; \quad i, j = \overline{r+1,m}\,;$$

$$\bar{q}, \bar{p} = \overline{0,r}\,; \quad p, q, s, t, f = \overline{1,r}\,; \quad \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1,n}\,;$$

$$\bar{a} = \overline{0,m}\,; \quad a = \overline{1,m}\,; \quad u = \overline{r+1,n}\,.$$

Оператор определим формулой:

$$\nabla A^{I_1\ldots I_r}_{K_1\ldots K_\eta} = dA^{I_1\ldots I_r}_{K_1\ldots K_\eta} + A^{J I_2\ldots I_r}_{K_1\ldots K_\eta}\omega^{I_1}_J + \ldots + A^{I_1\ldots I_{r-1}J}_{K_1\ldots K_\eta}\omega^{I_r}_J -$$

$$- A^{I_1\ldots I_r}_{J K_2\ldots K_\eta}\omega^J_{K_1} - \ldots - A^{I_1\ldots I_r}_{K_1\ldots K_{\eta-1}J}\omega^J_{K_\eta} - (r-\eta)A^{I_1\ldots I_r}_{K_1\ldots K_\eta}\omega^0_0 .$$

1. Отнесем проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A_{\bar{I}}\}$, инфинитезимальные перемещения которого:

$$dA_{\bar{I}} = \omega^{\bar{K}}_{\bar{I}} A_{\bar{K}}, \quad \text{где } D\omega^{\bar{K}}_{\bar{I}} = \omega^{\bar{J}}_{\bar{I}} \wedge \omega^{\bar{K}}_{\bar{J}}, \ \sum_{\bar{I}=0}^{n} \omega^{\bar{I}}_{\bar{I}} = 0 .$$

Пусть плоскость Π_r задана точками $M_{\bar{p}} = A_{\bar{p}} + M^u_{\bar{p}} A_u$, плоскость Π_m – точками $N_{\bar{a}} = A_{\bar{a}} + A^\alpha_{\bar{a}} A_\alpha$ и $\Pi_r \subset \Pi_m$.

Канонизируем репер $\{A_{\bar{I}}\}$ следующим образом: совместим грань $[A_{\bar{a}}]$ с плоскостью Π_m распределения $\mathcal{H}^r_m$ так, что $\{A_p\} \subset \Pi_r$, A_0 совпадает с центром распределения $\mathcal{H}^r_m$. Такой репер назовем репером нулевого порядка R^0.

В репере R^0 дифференциальные уравнения распределения $\mathcal{H}_m^\tau$ имеют вид:

$$\omega_p^\alpha = \Lambda_{pk}^\alpha \omega_0^k, \quad \omega_p^i = M_{pk}^i \omega_0^k, \quad \omega_i^\alpha = A_{ik}^\alpha \omega_0^k; \tag{1}$$

$$\Delta\Lambda_{pk}^\alpha \wedge \omega_0^k = 0, \ \Delta M_{pk}^i \wedge \omega_0^k = 0, \ \Delta A_{ik}^\alpha \wedge \omega_0^k = 0,$$

где

$$\Delta\Lambda_{pk}^\alpha = \nabla\Lambda_{pk}^\alpha + M_{pk}^i \omega_i^\alpha - \delta_k^\alpha \omega_p^0,$$

$$\Delta M_{pk}^i = \nabla M_{pk}^i + \Lambda_{pk}^\alpha \omega_\alpha^i - \delta_k^i \omega_p^0,$$

$$\Delta A_{ik}^\alpha = \nabla A_{ik}^\alpha - \Lambda_{pk}^\alpha \omega_i^p - \delta_k^\alpha \omega_i^0.$$

Рассмотрим тот случай распределения $\mathcal{H}_m^\tau$, когда оснащающее распределение $\mathcal{H}_m$ плоскостей Π_m скомпоновано в смысле А.П.Нордена, т.е. $\Pi_\tau \cap \Pi_{m-\tau} = A_0$, $\Pi_{m-\tau} \subset \Pi_m$, $\Pi_\tau \subset \Pi_m$. Поместим точки A_i в плоскость $\Pi_{m-\tau}$. Такой репер назовём репером, адаптированным распределению плоскостей $\Pi_{m-\tau}$, и обозначим R^1. Положим $A_{ip}^\alpha = 0$. Дифференциальные уравнения распределения в репере R^1 примут вид:

$$\omega_p^\alpha = \Lambda_{pk}^\alpha \omega_0^k, \quad \omega_p^i = M_{pk}^i \omega_0^k,$$
$$\omega_i^\alpha = A_{iu}^\alpha \omega_0^u, \quad \omega_i^p = N_{ik}^p \omega_0^k, \tag{2}$$

$$\nabla\Lambda_{pq}^\alpha = \Lambda_{pqk}^\alpha \omega_0^k, \tag{3}$$

$$\nabla\Lambda_{pi}^\alpha = \Lambda_{pik}^\alpha \omega_0^k, \tag{4}$$

$$\nabla\Lambda_{p\beta}^\alpha - \Lambda_{pq}^\alpha \omega_\beta^q - \Lambda_{pi}^\alpha \omega_\beta^i - \delta_\beta^\alpha \omega_p^0 = \Lambda_{p\beta k}^\alpha \omega_0^k, \tag{5}$$

$$\nabla M_{pq}^i + \Lambda_{pq}^\alpha \omega_\alpha^i = M_{pqk}^i \omega_0^k, \tag{6}$$

$$\nabla M_{pj}^i + \Lambda_{pj}^\alpha \omega_\alpha^i - \delta_j^i \omega_p^0 = M_{pjk}^i \omega_0^k, \tag{7}$$

$$\nabla M_{p\alpha}^i - M_{pq}^i \omega_\alpha^q - M_{pj}^i \omega_\alpha^j + \Lambda_{p\alpha}^\beta \omega_\beta^i = M_{p\alpha k}^i \omega_0^k, \tag{8}$$

$$\nabla A_{ij}^\alpha = A_{ijk}^\alpha \omega_0^k, \tag{9}$$

$$\nabla A_{i\beta}^\alpha - A_{ij}^\alpha \omega_\beta^j - \delta_\beta^\alpha \omega_i^0 = A_{i\beta k}^\alpha \omega_0^k, \tag{10}$$

$$\nabla N_{iq}^p - \delta_q^p \omega_i^0 = N_{iqk}^p \omega_0^k, \tag{11}$$

$$\nabla N_{ij}^p + A_{ij}^\alpha \omega_\alpha^p = N_{ijk}^p \omega_0^k, \tag{12}$$

$$\nabla N_{i\alpha}^p - N_{iq}^p \omega_\alpha^q - N_{ij}^p \omega_\alpha^j + A_{i\alpha}^\beta \omega_\beta^p = N_{i\alpha k}^p \omega_0^k, \tag{13}$$

$$A_{ij}^\alpha M_{[pk]}^j + A_{ip}^\alpha \Lambda_{[pk]} + \Lambda_{q[p}^\alpha N_{|i|k]}^q = 0. \tag{14}$$

2. Под нормализацией двухсоставного распределения $\mathcal{H}_m^\tau$ будем понимать нормализацию его базисного распределения $\mathcal{H}_\tau$ в смысле А.П.Нордена [3].

Построим сначала инвариантное поле нормалей 1-го рода $N_{n-\tau}(A_0)$: $N_{n-\tau}(A_0) \cap \Pi_\tau(A_0) \equiv A_0$; $N_{n-\tau}(A_0) \cup \Pi_\tau(A_0) = P_n$.

Допустим, что существует нетривиальный относительный инвариант $J = J(\Lambda_{pq}^\alpha)$, которым можно охватить обращенный фундаментальный тензор 1-го порядка V_α^{pq}, симметричный по индексам p, q и удовлетворяющий следующим уравнениям:

$$V_\alpha^{pq} \Lambda_{pq}^\beta = \tau \delta_\alpha^\beta,$$

$$V_\alpha^{pq} \Lambda_{qs}^\alpha = (n-m)\delta_s^p, \quad V_\alpha^{pq} \Lambda_{sq}^\alpha = (n-m)\delta_s^p,$$

$$\nabla V_\alpha^{pq} = V_{\alpha k}^{pq} \omega_0^k. \tag{15}$$

Продолжая уравнения (3), (15), получим:

$$\nabla\Lambda_{pqs}^\alpha - (\Lambda_{tq}^\alpha \Lambda_{ps}^\beta + \Lambda_{pt}^\alpha \Lambda_{qs}^\beta + \Lambda_{ts}^\alpha \Lambda_{pq}^\beta)\omega_\beta^t +$$
$$+ \Lambda_{pq}^\alpha \omega_s^0 + \Lambda_{sq}^\alpha \omega_p^0 + \Lambda_{ps}^\alpha \omega_q^0 = \Lambda_{pqsk}^\alpha \omega_0^k; \tag{16}$$

$$\nabla V_{\alpha q}^{pq} - (\tau+2) V_\alpha^{pq} \omega_q^0 + V_\alpha^{ps} \Lambda_{sq}^\beta \omega_\beta^q - V_\beta^{pq} \Lambda_{qs}^\beta \omega_\alpha^s +$$
$$+ (2n-2m+\tau)\omega_\alpha^p = V_{\alpha q k}^{pq} \omega_0^k. \tag{17}$$

Построим систему величин:

$$\widetilde{N}_\alpha^p = \Lambda_{(sq)t}^\beta V_\alpha^{sq} V_\beta^{pt} + \frac{(2n-2m+\tau)^2}{(\tau+2)(n-m+\tau)} \Big(V_{\alpha q}^{pq} +$$
$$+ \frac{1}{2n-2m+\tau} \Lambda_{(sq)t}^\beta V_\beta^{qt} V_\alpha^{sp} \Big); \ \nabla \widetilde{N}_\alpha^p + K_{\alpha t}^{p\gamma} \omega_\gamma^t = \widetilde{N}_{\alpha k}^p \omega_0^k, \tag{18}$$

где

$$K_{\alpha t}^{p\gamma} = \Big(\frac{(2n-2m+\tau)^2}{\tau+2} - \tau(n-m) \Big) \delta_\alpha^\gamma \delta_t^p -$$
$$-2\Lambda_{qf}^\gamma \Lambda_{(st)}^\beta V_\alpha^{qs} V_\beta^{pf} + \frac{2n-2m+\tau}{(n-m+\tau)(\tau+2)} \Lambda_{[st]}^\beta \Big(\Lambda_{(fq)}^\gamma V_\beta^{qs} V_\alpha^{pf} +$$
$$+ (n-m+\tau) V_\alpha^{ps} \delta_\beta^\gamma - \frac{(2n-2m+\tau)^2 - \tau(n-m+\tau)(\tau+2)}{2n-2m+\tau} V_\beta^{ps} \delta_\alpha^\gamma \Big)$$

образуют тензор 1-го порядка:

$$\nabla K_{\alpha t}^{p\gamma} = K_{\alpha t k}^{p\gamma} \omega_0^k.$$

8 Зак. 14041

Так как $\det\| K^{p\gamma}_{\alpha t} \| \neq 0$ [4], то можно ввести обращенный тензор $\overset{*}{K}{}^{p\gamma}_{\alpha t}$ [4]: $\overset{*}{K}{}^{p\gamma}_{\alpha t} K^{t\beta}_{\gamma q} = \delta^{\beta}_{\alpha}\delta^{p}_{q}$, $\overset{*}{K}{}^{p\gamma}_{\alpha t} K^{q\alpha}_{\beta p} = \delta^{\gamma}_{\beta}\delta^{q}_{t}$.

Тогда тензор 2-го порядка

$$\bar{N}^{p}_{\alpha} = \overset{*}{K}{}^{p\gamma}_{\alpha t}\tilde{N}^{t}_{\gamma}\ ,\ \nabla\bar{N}^{p}_{\alpha} + \omega^{p}_{\alpha} = \bar{N}^{p}_{\alpha\kappa}\omega^{\kappa}_{o} \tag{19}$$

определяет инвариантную нормаль 1-го рода $\mathcal{N}_{n-\tau}$ распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$. Квазитензор 2-го порядка

$$b_p = \frac{1}{(n-m)(\tau+2)}\Big[\Lambda^{\alpha}_{(pq)s}V^{qs}_{\alpha} + \bar{N}^{q}_{\beta}\Big((2n-2m+\tau)\Lambda^{\beta}_{(pq)} - (n-m)\Lambda^{\beta}_{qp} +$$

$$+\Lambda^{\alpha}_{qs}V^{ts}_{\alpha}\Lambda^{\beta}_{(pt)}\Big)\Big]\ ,\ \nabla b_p + \omega^{o}_{p} = b_{p\kappa}\omega^{\kappa}_{o} \tag{20}$$

определяет $(\tau-1)$-мерную плоскость $\mathcal{N}_{\tau-1}$ в плоскости Π_{τ}, не проходящую через центр A_o распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$ т.е. нормаль 2-го рода $\mathcal{N}_{\tau-1}(A_o)$ распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$.

Итак, в окрестности 2-го порядка образующего элемента распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$ внутренним инвариантным образом определена нормализация распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$ в смысле А.П.Нордена [3].

4. Произведем канонизацию репера R^1, расположив вершины A_{α} репера в плоскости нормали первого рода $\mathcal{N}_{n-\tau}$, определенной квазитензором $\{\bar{N}^{p}_{\alpha}\}$ (19). При этом получим, что

$$\omega^{p}_{\alpha} = H^{p}_{\alpha\kappa}\omega^{\kappa}_{o}. \tag{21}$$

Такой репер называется репером $R^1(\mathcal{N})$, адаптированным полю нормалей первого рода.

Построим квазитензор $\{\ell_p\}$:

$$\ell_p = -\frac{1}{n-m+\tau}(M^{i}_{pi} + \Lambda^{\alpha}_{p\alpha}),\ \nabla\ell_p + \omega^{o}_{p} = \ell_{p\kappa}\omega^{\kappa}_{o}. \tag{22}$$

Квазитензор $\{\ell_p\}$ определяет на двухсоставном распределении $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$ поле $(\tau-1)$-мерных плоскостей $\ell_{\tau-1}$. Каждая плоскость $\ell_{\tau-1}$ принадлежит плоскости Π_{τ} и не проходит через центр A_o распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$. В общем случае квазитензоры $\{\ell_p\}$ и $\{b_p\}$ (20) не совпадают, т.к. компоненты квазитензора $\{b_p\}$ построены при помощи компонент подобъекта $\{\Lambda^{\alpha}_{pq}, \Lambda^{\alpha}_{pqs}\}$ фундаментального объекта второго порядка распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$, а квазитензор $\{\ell_p\}$ охвачен фундаментальным объектом первого порядка распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$.

Функции

$$\mu_p \overset{def}{=} \bar{b}_p - \ell_p\ ,\ \nabla\mu_p = \mu_{p\kappa}\omega^{\kappa}_{o} \tag{22}$$

определяют на распределении $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$ поле ковариантного тензора (в общем случае не тривиального). В каждой плоскости $\Pi_{\tau}(A_o)$ тензор $\{\mu_p\}$ позволяет задать однопараметрический пучок $(\tau-1)$-мерных нормалей 2-го рода, внутренним инвариантным образом присоединенный к распределению $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$:

$$\mu_p(\sigma) = \bar{b}_p + \sigma\mu_p, \tag{23}$$

где σ - абсолютный инвариант.

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Распределения касательных элементов.- Тр.геометрического семинара ВИНИТИ, 1971, 3, 29-48.

2. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.-Тр.геометрич.семинара ВИНИТИ, 1971, 3, 49-94.

3. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.-Л., 1950.

4. Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности II. - Тр.геометр.семинара ВИНИТИ АН СССР, 1971, 3, с.95-114.