

УДК 531.383

А. Я. Шпилевой, В. Н. Худенко, Н. В. Персичкина

**К ВОПРОСУ О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ВИЗУАЛИЗАЦИИ
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ВОЛЧКА
ПО ГЛАДКОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Рассматривается вопрос о пространственной визуализации двух примеров движения волчка на гладкой поверхности. Анализируются случаи, допускающие аналитическое решение. Приведены графические иллюстрации этих решений.

This article considers the problem of 3D visualization of two examples of top movement along a smooth surface. The authors analyze the cases where analytical solutions are possible. Graphical illustrations to these solutions are provided.

Ключевые слова: пространственная визуализация, волчок, гладкая поверхность, центр инерции, момент инерции.

Key words: 3D visualization, top, smooth surface, inertia center, inertia momentum.

При изучении курсов физики и теоретической механики исключительно важное значение имеет быстрое и адекватное понимание механизма, изображенного на чертеже в учебнике, задачнике и особенно в тестовом задании. Наиболее трудны для понимания разделы физики, где описываются работа гироскопа, движение частиц в электрических и магнитных полях, прецессия и нутация волчка и т.д. Студенты или магистранты, к сожалению, часто не могут понять, как работает механизм или прибор.

Оказалось, что есть возможность существенно помочь в «оживлении чертежа» и демонстрации работы механизма. Достигается это технологией «динамическая визуализация», которая встраивает в визуальный ряд лекции или практического занятия специально для этих целей созданные анимации, демонстрирующие начальные условия задачи и работу механизмов.

Наиболее сложным как для восприятия, так и для реализации динамической визуализации являются пространственные задачи. Для их решения авторы предлагают использовать видеоролики, подготовленные в редакторе 3D-анимации, и графики «Blender». Этими средствами можно модели, движущиеся в пространстве, окрасить в любые цвета, сделать частично прозрачными, создать освещение из нескольких источников, рассматривать модели под удобными ракурсами, поверхность моделей оснастить различными текстурами. При демонстрации анимаций можно предусмотреть паузы, повторы и т. п. Дополнительный положительный эмоциональный момент дают блики, тени, отбрасываемые моделями, и др. С примерами таких задач можно ознакомиться на сайте одного из авторов (<http://khudenko.info>).

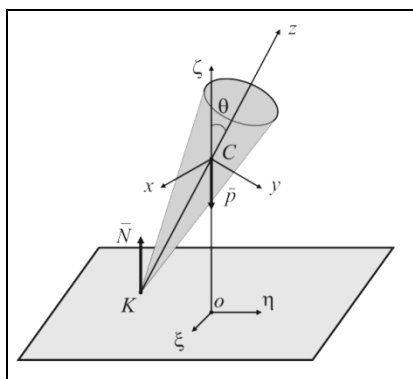


Рис. 1. Модель волчка

центр масс лежит на оси ζ . Обозначим $CK = a$.

Теорема о движении центра масс имеет вид:

$$\ddot{\xi}_C = 0, \quad \ddot{\eta}_C = 0, \quad m\ddot{\zeta}_C = N - mg. \quad (1)$$

Используем динамические и кинематические уравнения Эйлера для случаев, когда $\dot{\psi}_0 = \dot{\theta}_0 = \dot{\xi}_{C0} = \dot{\eta}_{C0} = 0$: $\zeta_{C0} = (-a \sin \theta_0) \dot{\theta}_0 = 0$.

Этот же случай можно получить, сообщив волчку вращение вокруг оси и поставив его без толчка на горизонтальную плоскость.

Так как ξ_{C0} и $\eta_{C0} = 0$, то из соотношения (1) имеем $\xi_C = \eta_C = 0$, то есть центр инерции волчка все время будет оставаться на одной вертикали. Используем динамические и кинематические уравнения Эйлера [1–3]:

$$\begin{aligned} A \sin^2 \theta (\cos \theta_0 - \cos \theta) (ma^2 \sin^2 \theta + A) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \\ = (\cos \theta_0 - \cos \theta) [2A m g a \sin^2 \theta - C^2 \dot{\phi}_0^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta)] = f(\theta), \end{aligned} \quad (2)$$

где $A = I_x$, $C = I_z$ — моменты инерции относительно главных осей.



Разделив в уравнении (2) переменные, можно найти функцию $\theta = \theta(t)$. Затем можно найти ψ и ϕ посредством квадратур [1–3].

Исследуем характер изменения угла θ со временем. Легко убедиться в том, что при $\theta < \theta_0$ функция $f(\theta)$ отрицательна. Но так как левая часть уравнения (2) не может быть отрицательной, то $\theta(t) \geq \theta_0$. Таким образом, $\theta = \theta_0$ является нижним пределом θ . При $\theta = \pi/2$ имеем:

$$f(\pi/2) = \cos \theta_0 (2A m g a - C^2 \dot{\phi}_0^2 \cos \theta_0). \quad (3)$$

Из последнего уравнения следует, что возможны два знака $f(\pi/2)$. Если

$$2A m g a < C^2 \dot{\phi}_0^2 \cos \theta_0,$$

то $f(\pi/2)$ – отрицательно и, следовательно, угол θ , не может достигнуть величины $\pi/2$. В этом случае волчок не будет падать и угол θ может изменяться в пределах $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 < \pi/2$. Траектория волчка (рис. 2, а) будет заключена между двумя концентрическими окружностями с радиусами $r_0 = a \sin \theta_0$, $r_1 = a \sin \theta_1$.

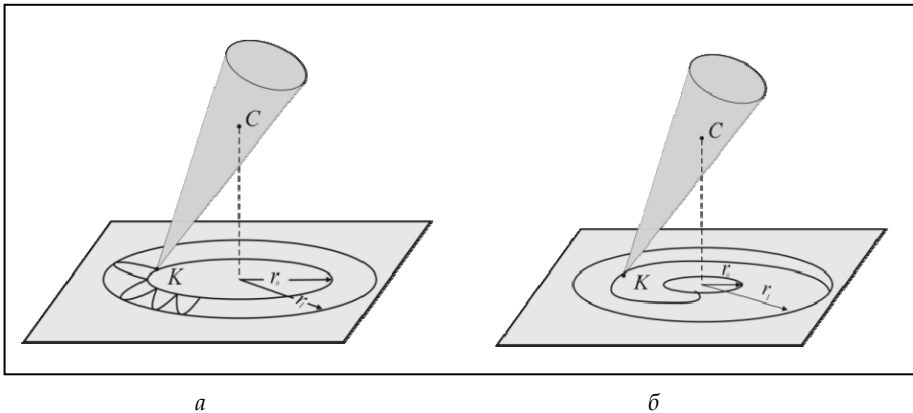


Рис. 2. Динамика вращения волчка

Следует отметить, что траектория точки K может быть как замкнутой, как и незамкнутой.

В другом случае $2A m g a \geq C^2 \dot{\phi}_0^2 \cos \theta_0$. Следовательно, $f(\pi/2) \geq 0$. Здесь угол θ станет увеличиваться и при некотором значении достигнет величины $\pi/2$, и это будет означать, что волчок упал. Точка в данном случае будет непрерывно удаляться от круга радиусом $r_0 = a \sin \theta_0$, приближаясь по спирали к окружности $r_1 = a \sin \theta_1$ (рис. 2, б).

Трёхмерную визуализацию рассмотренных случаев удалось реализовать в среде Blender. Результаты доложены на II Международной конференции, посвященной Карлу Якоби [4].



Список литературы

1. Голубева О. В. Теоретическая механика. М., 1961.
2. Суслов Г. К. Теоретическая механика. М., 1944.
3. Голубев Ю. Ф. Основы теоретической механики. М., 2000.
4. Shpilevoi A., Khudenko V., Persichkina N. Three-dimensional visualization of the classical gyroscope model // Материалы II Международной конференции, посвященной Карлу Якоби. Калининград, 2013. С. 33–36.

Об авторах

Шпилевой Алексей Яковлевич — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: ashpilevoi@kantiana.ru

Худенко Владимир Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: Vkhudenko@tis-dialog.ru

Персичкина Наталья Витальевна — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: persichkina@ramler.ru

About the authors

Alexey Shpilevoy — PhD, Associate Professor, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: ashpilevoi@kantiana.ru

Dr Vladimir Khudenko, Associate Professor, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: VKhudenko@tis-dialog.ru

Natalia Persichkina, Associate Professor, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: chkina@ramler.ru