ние $\bar{\Lambda}^{n-1}$, запишется в виде

$$\bar{\omega}_i^n = \bar{\Lambda}_{ij}\,\omega^j + \bar{\Lambda}_i\,\omega^n,$$

где

$$\bar{\Lambda}_{ij} = \Lambda_{ij} + h_{ij}^n, \quad \bar{\Lambda}_i = h_{in}^n.$$

Принимая во внимание конформность отображения f , найдем

$$h_{ij}^n = -\alpha_n g_{ij}, \quad h_{in}^n = \alpha_i. \qquad (24)$$

С учетом (24) получим

$$\bar{\Lambda}_{ij} = \Lambda_{ij} - \alpha_n g_{ij}, \quad \bar{\Lambda}_i = \alpha_i. \qquad (25)$$

Учитывая (25), запишем

$$\bar{\omega}_i^n = (\Lambda_{ij} - \alpha_n g_{ij})\,\omega^j + \alpha_i\,\omega^n. \qquad (26)$$

Далее, подставим $\omega_i^n = \Lambda_{ij}\,\omega^j$ и (26) во второе уравнение (23):

$$c_i^j\Lambda_{jk}\,\omega^k = (1+\rho_n)(\Lambda_{ij} - \alpha_n g_{ij})\,\omega^j + (1+\rho_n)\,\alpha_i\,\omega^n.$$

Ввиду линейной независимости форм ω^A из последней системы имеем следующее

$$c_i^k\Lambda_{kj} = (1+\rho_n)(\Lambda_{ij} - \alpha_n g_{ij}), \quad (1+\rho_n)\,\alpha_i = 0. \qquad (27)$$

Так как $(1+\rho_n)\neq 0$, то из второго уравнения (27) имеем $\alpha_i = 0$. Согласно последнему

$$d\alpha = \alpha_n\,\omega^n. \qquad (28)$$

В этом случае $\beta = \frac{1}{2}(\alpha_n)^2$ и из соотношений (15) следует, что

$$\omega_i^n = \frac{1}{2}\alpha_n\,\omega_i = \frac{1}{2}\alpha_n g_{ij}\,\omega^j, \quad d\alpha_n = \frac{1}{2}(\alpha_n)^2\,\omega^n. \qquad (29)$$

Из того, что $\omega_i^n = \Lambda_{ij}\,\omega^j$, и первого уравнения (29) заключаем

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{2}\alpha_n g_{ij}, \qquad (30)$$

т.е. гиперраспределение Δ^{n-1} является сферическим [3].

Теорема. В случае конформного отображения $f:\Omega\to\bar{\Omega}$ интегральные линии векторного поля $\vec{e}_n$ являются прямыми тогда и только тогда, когда гиперраспределение Δ^{n-1} является сферическим.

Доказательство. В одну сторону теорема доказана. Докажем ее в обратную сторону. Пусть Δ^{n-1} - сферическое гиперраспределение, т.е. прямая (x,y) проходит через неподвижную точку C пространства E^n . Полагаем

$$\vec{C} - \vec{x} = c^n\vec{e}_n.$$

Дифференцируя левую и правую части (31) и используя условие

неподвижности точки C , получаем

$$c^n\omega_n^i = \omega^i, \quad dc^n = \omega^n. \qquad (32)$$

Первой группе уравнений (32) на основании того, что $\omega_n^i = -g^{ij}\omega_j^n$, можно придать вид $c^n\omega_k^n = -g_{kj}\,\omega^j$ и, следовательно,

$$c^n(\Lambda_{kj}\,\omega^j + \Lambda_k\,\omega^n) = -g_{kj}\,\omega^j, \quad c^n\Lambda_{kj} = -g_{kj}, \quad c^n\Lambda_k = 0.$$

Так как точка x не может быть неподвижной точкой, то $\Lambda_k = 0$, значит, интегральные линии векторного поля $\vec{e}_n$ - прямые.

Библиографический список

1. С т е р н б е р г С. Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1970.

2. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.:Наука, 1976.

3. А л ш и б а я Э.Д. Сферическое распределение // Тр. Тбилисск. ун-та. 1983. Т.239.

УДК 514.75

ПОЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА МНОГООБРАЗИИ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В.С.М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)

В n-мерном проективном пространстве P_n рассматриваются m-мерные ($m\le n$) многообразия $K(n-2,m,n)$ квадратичных элементов [1], гиперплоскости которых образуют m-параметрическое семейство. Дана геометрическая характеристика полей основных геометрических объектов, порожденных многообразием $K(n-2,m,n)$.

Для случая $m=n$ найден тензор кривизны индуцированной аффинной связности, определяемой инвариантной нормализацией пространства P_n .

1. Расположим вершины A_α $(\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,n})$ репера $\{\bar{A}_0,\bar{A}_1,\dots,\bar{A}_n\}$ в гиперплоскости квадратичного элемента $Q_{n-2}\in K(n-2,m,n)$. Тогда его уравнения приводятся к виду:

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^0 = 0, \qquad (1.1)$$

где

$$\det(a_{\alpha\beta}) = 1. \qquad (1.2)$$

8*

Обозначим
$$\omega_\alpha \overset{def}{=} \omega_\alpha^0 . \qquad (I.3)$$

Формы Пфаффа
$$\nabla a_{\alpha\beta} = d a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma - a_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma + \frac{2}{n} a_{\alpha\beta}\omega_\gamma^\gamma \qquad (I.4)$$
связаны одним линейным соотношением
$$a^{\alpha\beta}\nabla a_{\alpha\beta} = 0 , \qquad (I.5)$$
где $a^{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha$.

Если $m = n$, то формы Пфаффа ω_α линейно независимы на многообразии $\mathcal{K}(n-2, m, n)$, и мы сможем принять их за первичные независимые формы многообразия. Система пфаффовых уравнений многообразия $\mathcal{K}(n-2, n, n)$ запишется в виде:
$$\nabla a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}^\gamma \omega_\gamma , \qquad (I.6)$$
причем, в силу (I.5)
$$a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}^\gamma = 0 . \qquad (I.7)$$
Если же $m < n$, то среди форм ω_α имеется m линейно независимых и, учитывая возможность изменения нумерации вершин репера, можно считать, что
$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_m \neq 0 , \qquad (I.8)$$
и записать систему пфаффовых уравнений многообразия $\mathcal{K}(n-2, m, n)$ в виде:
$$\nabla a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}^i \omega_i , \quad \omega_a = c_a^i \omega_i , \qquad (I.9)$$
где
$$a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}^i = 0 . \qquad (I.10)$$
Здесь и в дальнейшем $i, j, k = \overline{1, m}$; $a, b, c = \overline{m+1, n}$.

2. На многообразии $\mathcal{K}(n-2, n, n)$ определены следующие поля геометрических объектов [1].

1) Линейный однородный объект $\{a_{\alpha\beta}, b_\gamma\}$, где
$$b_\gamma = b_{\gamma\alpha}^\alpha , \qquad (2.1)$$
определяющий в проективном пространстве $\mathcal{P}_n$ инвариантный пучок гиперквадрик
$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + \frac{2n}{(n-1)(n+2)} b_\alpha x^\alpha x^0 + \lambda (x^0)^2 = 0 , \qquad (2.2)$$
содержащих локальный квадратичный элемент $Q_{n-2} \in \mathcal{K}(n-2, n, n)$.

2) Квазитензор
$$b^\alpha = a^{\alpha\beta} b_\beta , \qquad (2.3)$$
задающий в пространстве $\mathcal{P}_n$ инвариантную точку

$$\overline{B} = b^\alpha \overline{A}_\alpha + \frac{2 - n(n+1)}{n} \overline{A}_0 , \qquad (2.4)$$
не лежащую в гиперплоскости квадратичного элемента Q_{n-2}. Инвариантный гиперконус
$$a_{\alpha\beta}\left(x^\alpha + \frac{n b^\alpha}{n(n+1)-2} x^0\right)\left(x^\beta + \frac{n b^\beta}{n(n+1)-2} x^0\right) = 0 \qquad (2.5)$$
с вершиной в точке B, содержащий квадратичный элемент Q_{n-2}, порождает в $\mathcal{P}_n$ n-мерное многообразие невырожденных гиперконусов, ассоциированное с многообразием $\mathcal{K}(n-2, n, n)$.

3) Трижды ковариантный симметрический тензор
$$b_{\alpha\beta\gamma} = a_{\eta(\alpha} b_{\beta\gamma)}^\eta - \frac{2}{n+2} b_{(\alpha} a_{\beta\gamma)} , \qquad (2.6)$$
аполярный тензору $a^{\alpha\beta}$:
$$a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta\gamma} = 0 . \qquad (2.7)$$
Задание полей двух линейных геометрических объектов $\{a_{\alpha\beta}, b_\gamma\}$, $\{b_{\alpha\beta\gamma}\}$ определяет многообразие $\mathcal{K}(n-2, n, n)$ с точностью до проективных преобразований.

4) Дважды ковариантный симметрический тензор
$$b_{\alpha\beta} = a^{\alpha_1\alpha_2} a^{\beta_1\beta_2} b_{\alpha_1\beta_1\alpha} b_{\alpha_2\beta_2\beta} . \qquad (2.8)$$
Если $b = \det(b_{\alpha\beta}) \neq 0$, то тензор $\{b_{\alpha\beta}\}$ определяет в пространстве $\mathcal{P}_n$ квадратичный элемент $\widetilde{Q}_{n-2}$ с той же гиперплоскостью, что и квадратичный элемент Q_{n-2}, называемый основным. Квадратичный элемент $\widehat{Q}_{n-2}$ называется дополнительным.

5) Основные векторы
$$c^\alpha = a^{\alpha\beta\gamma} b_{\beta\gamma} , \quad C_\alpha = a_{\alpha\beta} c^\beta , \qquad (2.9)$$
определяющие соответственно инвариантную точку
$$\overline{C} = c^\alpha \overline{A}_\alpha \qquad (2.10)$$
в гиперплоскости квадратичного элемента Q_{n-2} и инвариантную $(n-2)$-мерную плоскость
$$C_\alpha x^\alpha = 0 , \quad x^0 = 0 . \qquad (2.11)$$
При $n > 3$ плоскость (2.11) пересекает квадратичный элемент Q_{n-2} по инвариантной $(n-3)$-мерной квадрике
$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0 , \quad C_\alpha x^\alpha = 0 , \quad x^0 = 0 ; \qquad (2.12)$$
при $n = 3$ она определяет на конике Q_1 две инвариантные точки.

О п р е д е л е н и е I.I. Индексом многообразия $\mathcal{K}(n-2, n, n)$ квадратичных элементов называется размерность k присоединенного точечного многообразия, описанного инвариантной точкой B, т.е. $k = \dim(B)$.

Если $k = n$, то многообразие $\mathcal{K}(n-2, n, n)$ называется невырожденным, если $k < n$ – вырожденным.

6) Относительные инварианты

$$c_0 = a_{\alpha\beta} c^\alpha c^\beta,\quad b_0 = a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta},\quad \hat{c}_0 = b_{\alpha\beta} c^\alpha c^\beta,\quad \hat{c} = b_{\alpha\beta\gamma} c^\alpha c^\beta c^\gamma. \tag{2.13}$$

Условие $c_0 = 0$ характеризует вырождение инвариантного $(n-2)$-мерного конуса

$$a_{\alpha\beta}(x^\alpha - c^\alpha)(x^\beta - c^\beta) = 0,\quad x^{n+1} = 0 \tag{2.14}$$

с вершиной в инвариантной точке C, условие $b_0 = 0$ – аполярность основного и дополнительного квадратичных элементов, условие $\hat{c}_0 = 0$ – принадлежность точки C дополнительному квадратичному элементу, условие $\hat{c} = 0$ – принадлежность этой точки присоединенной $(n-2)$-мерной поверхности третьего порядка

$$b_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0,\quad x^0 = 0. \tag{2.15}$$

7) Абсолютные инварианты

$$C_0 = \frac{c_0^n}{b^3},\quad B_0 = \frac{b_0^n}{b},\quad \hat{C}_0 = \frac{\hat{c}_0^n}{b^4},\quad \hat{C} = \frac{\hat{c}^n}{b^5}. \tag{2.16}$$

3. Рассмотрим многообразие $\mathcal{K}(n-2, n, n)$ в репере, где вершина A_0 совмещена с инвариантной точкой B. Тогда

$$b^\alpha = 0, \tag{3.1}$$

$$\omega_0^\alpha = m^{\alpha\beta}\omega_\beta. \tag{3.2}$$

Продолжая систему (3.2), получим:

$$dm^{\alpha\beta} + m^{\gamma\beta}\omega_\gamma^\alpha + m^{\alpha\gamma}\omega_\gamma^\beta - 2m^{\alpha\beta}\omega_0^0 = m^{\alpha\beta\gamma}\omega_\gamma. \tag{3.3}$$

Следовательно, система величин $\{m^{\alpha\beta}\}$ образует дважды контравариантный тензор. Пусть

$$\det(m^{\alpha\beta}) \neq 0. \tag{3.4}$$

Разрешая уравнения (3.2) относительно ω_α, находим:

$$\omega_\alpha = m_{\alpha\beta}\omega^\beta, \tag{3.5}$$

где $\omega^\beta \overset{def}{=} \omega_0^\beta$, а $m_{\alpha\beta}$ – приведенные миноры матрицы $(m^{\alpha\beta})$.

Рассмотрим формы Пфаффа

$$\tilde{\omega}_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta\omega_0^0. \tag{3.6}$$

Так как

$$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \tilde{\omega}_\beta^\alpha,\quad d\tilde{\omega}_\alpha^\beta = \tilde{\omega}_\alpha^\gamma \wedge \tilde{\omega}_\gamma^\beta + R^\beta_{\alpha\gamma\eta}\,\omega^\gamma \wedge \omega^\eta, \tag{3.7}$$

где

$$R^\beta_{\alpha\gamma\eta} = \frac{1}{2}\left(\delta^\beta_\eta m_{\alpha\gamma} - \delta^\beta_\gamma m_{\alpha\eta} + \delta^\beta_\alpha (m_{\eta\gamma} - m_{\gamma\eta})\right), \tag{3.8}$$

то формы ω^α, $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ определяют в нормализованной области (B) пространства $\mathcal{P}_n$ аффинную связность без кручения с тензором кривизны (3.8). Нормализация осуществляется гиперплоскостями квадратичных элементов.

4. На многообразии $\mathcal{K}(n-2, m, n)$, где $m < n$, система величин $\{c^i_a\}$ определяет инвариантное $(n-m-1)$-мерное подпространство

$$x^i + x^a c^i_a = 0,\quad x^0 = 0, \tag{4.1}$$

образованное точками гиперплоскости квадратичного элемента Q_{n-2}, которые при переходе к соседнему квадратичному элементу остаются в той же гиперплоскости. Это подпространство называется характеристическим подпространством [2] квадратичного элемента Q_{n-2}. Если $n-m$ вершин A_a репера расположить в характеристическом подпространстве (4.1), то его уравнения примут вид:

$$x^i = 0,\quad x^0 = 0. \tag{4.2}$$

Полярное $(m-1)$-мерное подпространство для (4.2) относительно квадратичного элемента Q_{n-2} определяется уравнениями

$$a_{\alpha b} x^\alpha = 0,\quad x^0 = 0. \tag{4.3}$$

Система уравнений

$$a_{bc} x^b = 0,\quad x^i = 0,\quad x^0 = 0 \tag{4.4}$$

определяет совокупность общих точек характеристического подпространства (4.2) и полярного подпространства (1.9).

Если $\operatorname{rang}(a_{bc}) = n-m$, то эти подпространства не пересекаются. В этом случае многообразие $\mathcal{K}(n-2, m, n)$ называется полярно канонизируемым, т.к. вершины A_i репера можно расположить в полярном подпространстве. Для многообразий, допускающих полярную канонизацию, определены поля следующих геометрических объектов.

1) Квазитензор

$$\tilde{a}^i = a^{jk} b^i_{jk}, \tag{4.5}$$

определяющий инвариантную $(n-m)$-плоскость

$$x^i + \frac{n}{2(n-m)}\tilde{a}^i x^0 = 0, \tag{4.6}$$

содержащую характеристическое подпространство локального квадратичного элемента Q_{n-2}. Из тождеств (1.10) вытекает

$$\tilde{a}^i = -a^{bc} b^i_{bc} \qquad (4.7)$$

2) Линейные однородные объекты $(a_{ij}, \tilde{b}_k), (a_{bc}, \tilde{b}_a)$, где

$$\tilde{b}_i = b^k_{ik}, \quad \tilde{b}_a = b^k_{ak}. \qquad (4.8)$$

Они определяют в пространстве $\mathcal{P}_n$ инвариантные пучки гиперконусов

$$a_{ij}x^ix^j + \frac{2n}{n(m+1)-2}\tilde{b}_i x^i x^0 + \lambda (x^0)^2 = 0, \qquad (4.9)$$

$$a_{bc}x^bx^c + \frac{2}{m}\tilde{b}_c x^c x^0 + \mu (x^0)^2 = 0, \qquad (4.10)$$

имеющие вершинами соответственно характеристическое и полярное подпространства.

3) Квазитензоры

$$\tilde{b}^i = a^{ik}\tilde{b}_k, \quad \tilde{b}^a = a^{ac}\tilde{b}_c, \qquad (4.11)$$

которые определяют инвариантные подпространства

$$x^i + \frac{n}{n(m+1)-2}\tilde{b}^i x^0 = 0, \qquad (4.12)$$

$$x^a + \frac{1}{m}\tilde{b}^a x^0 = 0, \qquad (4.13)$$

пересекающиеся в единственной инвариантной точке

$$\tilde{\bar{B}} = \bar{A}_0 - \frac{n}{n(m+1)-2}\tilde{b}^i\bar{A}_i - \frac{1}{m}\tilde{b}^a\bar{A}_a. \qquad (4.14)$$

Квадратичный элемент $Q_{n-2} \in \mathcal{K}(n-2, m, n)$ и точка $\tilde{B}$ однозначно определяют в пространстве $\mathcal{P}_n$ невырожденный инвариантный гиперконус второго порядка

$$a_{ij}x^ix^j + a_{bc}x^bx^c + \frac{2}{n(m+1)-2}\tilde{b}_i x^i x^0 + \frac{2}{m}\tilde{b}_a x^a x^0 = 0. \qquad (4.15)$$

4) **В**екторы

$$a^i = \tilde{a}^i - \frac{2(n-m)}{n(m+1)-2}\tilde{b}^i, \quad a_i = a_{ij}a^j, \qquad (4.16)$$

определяющие соответственно инвариантную точку

$$\bar{A} = a^i\bar{A}_i \qquad (4.17)$$

в полярном подпространстве

$$x^a = 0, \; x^0 = 0 \qquad (4.18)$$

и инвариантное $(m-1)$-мерное подпространство

$$a_ix^i = 0, \quad x^a = 0, \; x^0 = 0 \qquad (4.19)$$

– поляру точки A относительно квадрики

$$a_{ij}x^ix^j = 0, \; x^a = 0, \; x^0 = 0, \qquad (4.20)$$

образованной пересечением квадратичного элемента Q_{n-2} с полярным подпространством.

5) Трижды ковариантный симметрический тензор

$$b_{ijk} = a_{h(i}b^h_{jk)} - \frac{2(n-1)}{n(m+1)-2}\tilde{b}_{(i}a_{jk)}, \qquad (4.21)$$

задающий в пространстве $\mathcal{P}_n$ инвариантный $(n-2)$-мерный конус третьего порядка

$$b_{ijk}x^ix^jx^k = 0, \; x^0 = 0. \qquad (4.22)$$

Библиографический список

1. Малаховский В.С. Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве // Тр. Томского ун-та. 1963. Т.168. С.28-42.

2. Малаховский В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1969. Т.2. С.179-206.

УДК 514.75

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННЫЕ СЕМЕЙСТВОМ КОЛЛИНЕАЦИЙ

Н.В.Малаховский

(Калининградский государственный университет)

Найден пучок метрических тензоров $\{\overset{\sigma}{g}_{JK}\}$, охватываемых полями фундаментальных объектов n-параметрического семейства Π_n, оснащенных коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to P_n$ n-мерных проективных пространств [1]. Рассмотрены римановы пространства, порождаемые тензорами в нормализованном проективном пространстве $\mathcal{P}_n$, и объекты связности Леви-Чивита.

Продолженная система уравнений Пфаффа семейства коллинеаций Π_n имеет вид ([1], (1.6) - (1.9)):

$$\omega^i = \lambda^i_J \Omega^J, \;\; \nabla M^i_J = M^i_{JK}\Omega^K, \;\; \nabla P_J + \Omega^0_J - M^k_J\omega^0_k = P_{JK}\Omega^K,$$