УДК 514.756

А. В. Столяров

(Чувашский государственный педагогический университет, Чебоксары)

АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ПРОЕКТИВНО-МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Изучаются некоторые вопросы геометрии двух двойственных эквиаффинных связностей, индуцируемых нормализацией регулярной гиперповерхности, погруженной в проективно-метрическое пространство K_n, $n>2$; при этом нормализация определена внутренним образом в третьей дифференциальной окрестности.

Ключевые слова: проективно-метрическое пространство, двойственность, нормализация, пространство аффинной связности, тензор Риччи, тензор Дарбу.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}, \bar{L} = \overline{0,n};\ I, J, K, L = \overline{1,n};\ i, j, k, l, s, t = \overline{1,n-1}.$$

Оператор ∇ действует по закону:

$$\nabla T^{\alpha}_{iu} = dT^{\alpha}_{iu} - T^{\alpha}_{iv}\omega^{v}_{u} - T^{\alpha}_{ju}\omega^{j}_{i} + T^{\beta}_{iu}\omega^{\alpha}_{\beta}.$$

1. Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n. Деривационные формулы проективного репера $R = \{B_{\bar{I}}\}$ записываются в виде $dB_{\bar{I}} = \omega^{\bar{K}}_{\bar{I}} B_{\bar{K}}$, где формы Пфаффа $\omega^{\bar{K}}_{\bar{I}}$ удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства P_n [8]:

$$D\omega^{\bar{K}}_{\bar{I}} = \omega^{\bar{L}}_{\bar{I}} \wedge \omega^{\bar{K}}_{\bar{L}},\ \omega^{\bar{L}}_{\bar{L}} = 0. \tag{1}$$

Известно [4], что пространством K_n с проективной метрикой называется проективное пространство P_n, в котором задана неподвижная гиперквадрика Q_{n-1} (абсолют), уравнение которой в репере R записывается в виде

$$g_{I\overline{K}}x^{\overline{I}}x^{\overline{K}}=0,\, g_{\overline{IK}}=g_{\overline{KI}}. \qquad (2)$$

Согласно работе [3], пространство K_n ниже будем называть проективно-метрическим. Условием неподвижности гиперквадрики (2) является [3] выполнение дифференциальных уравнений

$$dg_{\overline{IK}}-g_{\overline{IL}}\omega_{\overline{K}}^{\overline{L}}-g_{\overline{LK}}\omega_{\overline{I}}^{\overline{L}}=\theta g_{\overline{IK}},\, D\theta=\theta\wedge\theta_0^0. \qquad (3)$$

Отметим, что фундаментальной группой пространства K_n является стационарная подгруппа абсолюта Q_{n-1}.

Доказано [6], что в предположении $g_{00}\neq 0$ (последнее равносильно тому, что $\mathrm{B}_0\notin Q_{n-1}$) за счет нормировки коэффициентов $g_{\overline{IK}}$ и вершин репера R уравнение (2) абсолюта Q_{n-1} и условие (3) его неподвижности можно записать соответственно в виде:

$$a_{IK}x^Ix^K+\frac{1}{c}\left(g_{I0}x^I+cx^0\right)^2=0; \qquad (4)$$

$$\begin{gathered}da_{IK}-a_{IL}\omega_K^L-a_{LK}\omega_I^L=-\frac{1}{c}\left(a_{IL}g_{K0}+a_{KL}g_{I0}\right)\omega_0^L,\\ dg_{I0}-g_{L0}\omega_I^L-c\omega_I^0=a_{IL}\omega_0^L,\end{gathered} \qquad (5)$$

где $a_{IK}=g_{IK}-\dfrac{g_{I0}g_{K0}}{c},\, a_{[IK]}=0,\, c=g_{00}=const\neq 0;$ при этом форма ω_0^0 становится главной:

$$\omega_0^0=-\frac{g_{L0}}{c}\omega_0^L. \qquad (6)$$

2. В проективно-метрическом пространстве K_n рассмотрим гиперповерхность V_{n-1}, $n\geq 3$, текущая точка которой не принадлежит абсолюту Q_{n-1}. В репере R первого порядка

$\left(B_0 \in V_{n\text{-}1}\right.$, вершины B_i репера принадлежат касательной гиперплоскости $T_{n-1}(B_0)$ к гиперповерхности в ее текущей точке $\left.B_0\right)$ дифференциальное уравнение $V_{n\text{-}1}$ имеет вид [3]

$$\omega_0^n = 0. \tag{7}$$

Трехкратное продолжение уравнения (7) с использованием (1), (6) приводит к следующим дифференциальным уравнениям:

$$\omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_0^j, \, \Lambda_{[ij]}^n = 0; \tag{8}$$

$$\nabla \Lambda_{ij}^n = \Lambda_{ijk}^n \omega_0^k, \, \Lambda_{i[jk]}^n = \frac{1}{c} \Lambda_{i[j}^n g_{k]0}; \tag{9}$$

$$\nabla \Lambda_{ijk}^n - \Lambda_{(ij}^n \Lambda_{k)s}^n \omega_n^s + \Lambda_{k(i}^n \omega_{j)}^0 = \Lambda_{ijks}^n \omega_0^s, \, \Lambda_{ij[ks]}^n = \frac{1}{c} \Lambda_{ij[k}^n g_{s]0}; \tag{10}$$

поля геометрических объектов $\{\Lambda_{ij}^n\}, \{\Lambda_{ijk}^n, \Lambda_{ij}^n\}$ относятся соответственно ко 2-й и 3-й дифференциальным окрестностям точки $B_0 \in V_{n\text{-}1}$.

Предположим, что гиперповерхность $V_{n\text{-}1} \subset K_n$ является регулярной, то есть $\Lambda \overset{def}{=} \left|\Lambda_{ij}^n\right| \neq 0;$ следовательно, существует взаимный тензор Λ_n^{kj} второго порядка:

$$\Lambda_{ik}^n \Lambda_n^{kj} = \delta_i^j, \, \nabla \Lambda_n^{ij} = -\Lambda_n^{ik} \Lambda_n^{sj} \Lambda_{kst}^n \omega_0^t, \tag{11}$$

$$d \ln \Lambda + (n+1)\omega_n^n = A_k \omega_0^k, \, A_k = \Lambda_n^{st} \Lambda_{tsk}^n + \frac{2}{c} g_{k0}. \tag{12}$$

Продолжая уравнение (12), имеем

$$\nabla A_i - (n+1)\Lambda_{si}^n \omega_n^s = A_{ik} \omega_0^k, \, A_{[ik]} = \frac{1}{c} A_{[i} g_{k]0},$$

$$\nabla A_{ij} + A_j \omega_i^0 - \Lambda_{ij}^n A_k \omega_n^k - (n+1)\left(\Lambda_{kij}^n \omega_n^k + \Lambda_{ij}^n \omega_n^0\right) = A_{ijk} \omega_0^k, \tag{13}$$

$$A_{i[jk]} = \frac{1}{c} A_{i[j} g_{k]0}.$$

3. Рассмотрим новую систему из $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\overline{\omega}_{\bar{I}}^{\bar{K}}$:

$$\overline{\omega}_0^i = \omega_0^i, \overline{\omega}_0^n = \omega_0^n = 0, \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0 - \left(\frac{\mathrm{A}_s}{n+1} - \frac{g_{s0}}{c}\right)\omega_0^s,$$

$$\overline{\omega}_n^n = \omega_n^n - \left(\frac{\mathrm{A}_s}{n+1} - \frac{g_{s0}}{c}\right)\omega_0^s, \overline{\omega}_i^j = \omega_i^j + \left(\Lambda_n^{jk}\Lambda_{kis}^n - \delta_i^j \frac{\mathrm{A}_s}{n+1}\right)\omega_0^s, \quad (14)$$

$$\overline{\omega}_i^n = -\Lambda_{ik}^n \omega_0^k, \overline{\omega}_i^0 = \Lambda_{ik}^n \omega_n^k, \overline{\omega}_n^i = -\Lambda_n^{ik}\omega_k^0, \overline{\omega}_n^0 = \omega_n^0.$$

Согласно соотношениям (1, 5_2, 6, 8—11, 13), формы $\overline{\omega}_{\bar{I}}^{\bar{K}}$ системы (14) удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства $\overline{\mathrm{P}}_n$, то есть

$$D\overline{\omega}_{\bar{I}}^{\bar{K}} = \overline{\omega}_{\bar{I}}^{\bar{L}} \wedge \overline{\omega}_{\bar{L}}^{\bar{K}}, \overline{\omega}_{\bar{L}}^{\bar{L}} = 0, \quad (15)$$

причем они являются формами инфинитезимального перемещения тангенциального репера $\{\xi_{\bar{K}}\}$: $d\xi_{\bar{K}} = \overline{\omega}_{\bar{K}}^{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}$, где

$$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda}}\left[\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1 \dots \mathrm{B}_{n-1}\right], \xi_n = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda}}\left[\mathrm{B}_n\mathrm{B}_1 \dots \mathrm{B}_{n-1}\right],$$

$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda}}\sum_{k=1}^{n-1}\Lambda_{ki}^n\left[\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1 \dots \mathrm{B}_{k-1}\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{k+1} \dots \mathrm{B}_{n-1}\right]. \quad (16)$$

Согласно соотношениям (8, 14) имеем

$$\overline{\omega}_i^n = \overline{\Lambda}_{ik}^n \overline{\omega}_0^k, \quad (17)$$

где

$$\overline{\Lambda}_{ij}^n = -\Lambda_{ij}^n. \quad (18)$$

Дифференциальные уравнения (9) в силу (14, 18) можно переписать в виде

$$d\overline{\Lambda}_{ij}^n + \overline{\Lambda}_{ij}^n \overline{\omega}_n^n - \overline{\Lambda}_{ik}^n \overline{\omega}_j^k - \overline{\Lambda}_{kj}^n \overline{\omega}_i^k = \overline{\Lambda}_{ijk}^n \overline{\omega}_0^k,$$

где

$$\overline{\Lambda}_{ijk}^n = \Lambda_{ijk}^n - \Lambda_{ij}^n\left(\frac{g_{k0}}{c} + \frac{\mathrm{A}_k}{n+1}\right). \quad (19)$$

С использованием соотношений (6, 7, 14) получим

$$\overline{\omega}_0^0 = -\frac{\overline{g}_{k0}}{c}\overline{\omega}_0^k, \tag{20}$$

где

$$\overline{g}_{k0} = \frac{c}{n+1}\mathrm{A}_k. \tag{21}$$

Аналогично с использованием равенств (18, 19, 21) находим, что функции $\overline{\mathrm{A}}_k \stackrel{def}{=} \overline{\Lambda}_n^{st}\overline{\Lambda}_{tsk}^n + \frac{2}{c}\overline{g}_{k0}$ (см. (12)) имеют строение

$$\overline{\mathrm{A}}_k = \frac{n+1}{c}g_{k0}. \tag{22}$$

Доказано [7], что: 1) преобразование $J:\omega_I^K \to \overline{\omega}_I^K$ структурных форм по закону (14) является инволютивным, то есть $J \equiv J^{-1}$; 2) регулярная гиперповерхность V_{n-1}, погруженная в проективно-метрическое пространство K_n, $n \geq 3$, индуцирует:

а) в 3-й дифференциальной окрестности проективное пространство $\overline{\mathrm{P}}_n$, двойственное [5] K_n относительно инволютивного преобразования структурных форм по закону (14), причем пространство $\overline{\mathrm{P}}_n$ в 4-й дифференциальной окрестности имеет внутренним образом определяемый тангенциальный абсолют $\overline{Q}_{n-1}$, двойственный Q_{n-1}; следовательно, регулярная гиперповерхность $V_{n-1} \subset \mathrm{K}_n$ в 4-й дифференциальной окрестности внутренним образом индуцирует проективно-метрическое пространство $\overline{\mathrm{K}}_n$, двойственное K_n;

б) во 2-й дифференциальной окрестности подмногообразие $\overline{V}_{n-1} \subset \overline{\mathrm{K}}_n$, двойственное исходной гиперповерхности V_{n-1}; его дифференциальное уравнение в тангенциальном репере (16) имеет вид $\overline{\omega}_0^n = 0$, причем тангенциальная гиперповерхность $\overline{V}_{n-1}$ представляет собой регулярное (n—1)-параметрическое семейство касательных гиперплоскостей к V_{n-1}.

4. Уравнения (5) в силу (7, 8) примут вид:

$$\nabla a_{ij} = -\frac{1}{c}\left(a_{ik}g_{j0} + a_{jk}g_{i0}\right)\omega_0^k + a_{ni}\omega_j^n + a_{nj}\omega_i^n,$$

$$\nabla a_{ni} - a_{ik}\omega_n^k = -\frac{1}{c}\left(a_{ik}g_{n0} + a_{nk}g_{i0}\right)\omega_0^k + a_{nn}\omega_i^n, \qquad (23)$$

$$\nabla a_{nn} - 2a_{nk}\omega_n^k = -\frac{2}{c}a_{nk}g_{n0}\omega_0^k,$$

$$dg_{i0} - g_{k0}\omega_i^k - c\omega_i^0 = a_{ik}\omega_0^k + g_{n0}\omega_i^n,$$

$$dg_{n0} - g_{k0}\omega_n^k - g_{n0}\omega_n^n - c\omega_n^0 = a_{nk}\omega_0^k.$$

Следуя Г. Ф. Лаптеву [3], в работе [1] на регулярной гиперповерхности $V_{n\text{-}1} \subset K_n$ в 4-й дифференциальной окрестности найдено поле соприкасающихся гиперквадрик Q_{n-1}^2:

$$\Lambda_{ij}^n x^i x^j + 2\frac{\Lambda_i}{n+1}x^i x^n + S_n (x^n)^2 = 2x^0 x^n, \qquad (24)$$

где

$$\Lambda_i = A_i + (n+1)G_i,\ G_i = -\frac{1}{c}g_{i0},$$

$$\nabla\Lambda_i + (n+1)\left(\omega_i^0 - \Lambda_{is}^n\omega_n^s\right) = \Lambda_{ij}\omega_0^j, \qquad (25)$$

$$S_n = \frac{1}{n^2-1}\Lambda_n^{st}\left(\Lambda_{st} - \frac{\Lambda_s\Lambda_t}{n+1} + \Lambda_s G_t\right).$$

Известно [1], что необходимым и достаточным условием вырождения гиперповерхности $V_{n\text{-}1} \subset K_n$ в гиперквадрику (24) является обращение в нуль симметричного тензора Дарбу

$$D_{ijk}^n = (n+1)\left(\Lambda_{ijk}^n - G_i\Lambda_{jk}^n - G_j\Lambda_{ik}^n\right) - \Lambda_{(ij}^n A_{k)}. \qquad (26)$$

5. Пусть гиперповерхность $V_{n\text{-}1} \subset K_n$ нормализована [4] полями квазитензоров соответственно третьего G_n^i и первого G_i порядков, где

$$G_n^i \overset{def}{=} -\frac{1}{n+1}\Lambda_n^{ij}\mathrm{A}_j, \ \ \nabla G_n^i + \omega_n^i = G_{nk}^i\omega_0^k, \ \nabla G_i + \omega_i^0 = G_{ik}\omega_0^k; \quad (27)$$

в силу (11, 13$_1$) и (23$_4$) имеют место соотношения

$$G_{nk}^i = \frac{1}{n+1}\Lambda_n^{is}\left(\Lambda_n^{lt}\Lambda_{slk}^n\mathrm{A}_t - \mathrm{A}_{sk}\right), \ G_{ik} = -\frac{1}{c}\left(a_{ik} + g_{n0}\Lambda_{ik}^n\right). \quad (28)$$

Нетрудно заметить, что нормализация гиперповерхности V$_{n\text{-}1}$ $\subset \mathrm{K}_n$ полями квазитензоров G_n^i, G_i является взаимной относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (24).

Возьмем систему форм Пфаффа $\{\overset{1}{\theta}{}^i, \overset{1}{\theta}{}^i_j\}$, где

$$\overset{1}{\theta}{}^i = \omega_0^i, \overset{1}{\theta}{}^i_j = \omega_j^i - G_n^i\omega_j^n + G_j\omega_0^i - \delta_j^i\underbrace{(\omega_0^0 - G_k\omega_0^k)}_{0}; \quad (29)$$

эта система в силу (1, 6, 8, 27) удовлетворяет структурным уравнениям Картана — Лаптева [2; 3]

$$D\overset{1}{\theta}{}^i = \overset{1}{\theta}{}^k \wedge \overset{1}{\theta}{}^i_k, \ D\overset{1}{\theta}{}^i_j = \overset{1}{\theta}{}^k_j \wedge \overset{1}{\theta}{}^i_k + \frac{1}{2}\overset{1}{r}{}^i_{jst}\overset{1}{\theta}{}^s \wedge \overset{1}{\theta}{}^t, \quad (30)$$

где

$$\overset{1}{r}{}^i_{jst} = -2\Bigg[G_n^k G_n^i \Lambda_{j[s}^n \Lambda_{t]k}^n + \frac{1}{n+1}\Lambda_n^{ik}\left(\Lambda_n^{lp}\mathrm{A}_p\Lambda_{kl[s}^n\Lambda_{t]j}^n - \mathrm{A}_{k[s}\Lambda_{t]j}^n\right) -$$
$$- G_n^k G_k \Lambda_{j[s}^n\delta_{t]}^i + \frac{1}{c}\left(a_{j[s}\delta_{t]}^i + g_{n0}\Lambda_{j[s}^n\delta_{t]}^i\right)\Bigg]. \quad (31)$$

Следовательно, нормализация (G_n^i, G_i) гиперповерхности V$_{n\text{-}1}$ $\subset \mathrm{K}_n$ индуцирует аффинную связность $\overset{1}{\nabla}$ без кручения; ее тензор кривизны имеет строение (31). Так как $2\overset{1}{r}_{[js]} = -\overset{1}{r}{}^i_{ijs} = 0$, где $\overset{1}{r}_{js} = \overset{1}{r}{}^i_{jsi}$ — тензор Риччи, то связность $\overset{1}{\nabla}$ является эквиаффинной [4]. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Нормализация регулярной гиперповерхности* $\mathrm{V}_{n\text{-}1} \subset \mathrm{K}_n, n \geq 3$, *определяемая внутренним образом в 3-й дифференциальной окрестности полями квазитензоров* G_n^i *и* G_i *(см. (25, 27)), является взаимной относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (24) и индуцирует эквиаффинную связность* $\overset{1}{\nabla}$ *со структурными формами (29) (эквиаффинная связность первого рода).*

6. Согласно монографии [5], нормализация одной из регулярных гиперповерхностей $\mathrm{V}_{n\text{-}1} \subset \mathrm{K}_n$ и $\overline{V}_{n-1} \subset \overline{\mathrm{K}}_n$ равносильна нормализации другой; при этом компоненты полей оснащающих объектов $\{G_n^i, G_i\}, \{\overline{G}_n^i, \overline{G}_i\}$ связаны соотношениями

$$\overline{G}_n^i = -\Lambda_n^{ij} G_j,\ \overline{G}_i = \Lambda_{ij}^n C_n^j; \qquad (32)$$

эти функции в силу (9, 11, 14) удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида (27):

$$d\overline{G}_n^i - \overline{G}_n^i \overline{\omega}_n^n + \overline{G}_n^j \overline{\omega}_j^i + \overline{\omega}_n^i = \overline{G}_{nj}^i \overline{\omega}_0^j,$$
$$d\overline{G}_i - \overline{G}_j \overline{\omega}_i^j + \overline{\omega}_i^0 = \overline{G}_{ij} \overline{\omega}_0^j;$$

$$\overline{G}_{nj}^i = \Lambda_n^{ik}\left(\frac{1}{c} a_{kj} - G_k G_j\right) + \frac{1}{c} g_{n0} \delta_j^i, \qquad (34)$$
$$\overline{G}_{ij} = G_n^k \left(\Lambda_{ik}^n \frac{\mathrm{A}_j}{n+1} - \Lambda_{kij}^n\right).$$

По аналогии с (29) возьмем систему форм Пфаффа $\{\overset{2}{\theta}{}^i, \overset{2}{\theta}{}_j^i\}$, где

$$\overset{2}{\theta}{}^i = \overline{\omega}_0^i,\ \overset{2}{\theta}{}_j^i = \overline{\omega}_j^i - \overline{G}_n^i \overline{\omega}_j^n + \overline{G}_j \overline{\omega}_0^i - \delta_j^i \left(\overline{\omega}_0^0 - \overline{G}_k \overline{\omega}_0^k\right). \qquad (35)$$

Согласно (15, 33), система форм (35) удовлетворяет структурным уравнениям пространства аффинной связности без кручения, ибо

$$D\overset{2}{\theta}{}^i = \overset{2}{\theta}{}^k \wedge \overset{2}{\theta}{}_k^i,\ D\overset{2}{\theta}{}_j^i = \overset{2}{\theta}{}_j^k \wedge \overset{2}{\theta}{}_k^i + \frac{1}{2} \overset{2}{r}{}_{jst}^i\, \overset{2}{\theta}{}^s \wedge \overset{2}{\theta}{}^t; \qquad (36)$$

тензор кривизны $\overset{2}{r}{}^i_{jst}$ аффинной связности $\overset{2}{\nabla}$ имеет строение

$$\overset{2}{r}{}^i_{jst} = 2\Big[G_k G^k_n \Lambda^n_{j[s}\delta^i_{t]} + \frac{1}{c}\Big(\Lambda^{ik}_n a_{k[s}\Lambda^n_{t]j} + g_{n0}\delta^i_{[s}\Lambda^n_{t]j}\Big) - G^k_n \Lambda^n_{kj[s}\delta^i_{t]} -$$
$$- \frac{1}{n+1}\Big(\frac{1}{n+1}\mathrm{A}_j \mathrm{A}_{[s}\delta^i_{t]} + \mathrm{A}_{j[s}\delta^i_{t]}\Big)\Big]. \qquad (37)$$

В силу (9, 13$_1$, 37) справедливо $\overset{2}{r}{}^i_{ist} = 0$, то есть тензор Риччи $\overset{2}{r}_{st}$ связности $\overset{2}{\nabla}$ симметричен; следовательно, аффинная связность $\overset{2}{\nabla}$ является эквиаффинной.

Из строений (29, 35) форм $\overset{1}{\theta}{}^i_j$ и $\overset{2}{\theta}{}^i_j$ с использованием (14, 32) находим

$$\overset{2}{\theta}{}^i_j = \overset{1}{\theta}{}^i_j + G^i_n\omega^n_j - G_j\omega^i_0 + \Lambda^{ik}_n\Big(\Lambda^n_{kjs}\omega^s_0 - G_k\omega^n_j\Big) +$$
$$+ \Lambda^n_{jk}G^k_n\omega^i_0 + \delta^i_j G^k_n\omega^n_k. \qquad (38)$$

Теперь дифференциальные уравнения (9) с учетом (29, 38) запишутся в виде

$$d\Lambda^n_{ij} - \Lambda^n_{ik}\overset{2}{\theta}{}^k_j - \Lambda^n_{kj}\overset{1}{\theta}{}^k_i = -\Lambda^n_{ij}\Big(\omega^n_n + G^k_n\omega^n_k\Big); \qquad (39)$$

это говорит о том, что аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ сопряжены [4] относительно поля асимптотического тензора Λ^n_{ij}.

Аффинная связность $\overset{0}{\nabla}$, средняя [4] по отношению к связностям $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, определяется системой структурных форм $\left\{\omega^i_0, \overset{0}{\theta}{}^i_j = \frac{1}{2}\left(\overset{1}{\theta}{}^i_j + \overset{2}{\theta}{}^i_j\right)\right\}$. Для средней связности из уравнений (39) имеем

$$d\Lambda_{ij}^{n} - \Lambda_{ik}^{n} \overset{0}{\theta}{}_{j}^{k} - \Lambda_{kj}^{n} \overset{0}{\theta}{}_{i}^{k} = -\Lambda_{ij}^{n} \underbrace{(\omega_{n}^{n} + G_{n}^{k}\omega_{k}^{n})}_{\Theta}. \qquad (40)$$

Последние уравнения говорят о том, что средняя аффинная связность является вейлевой [4] с полем метрического тензора Λ_{ij}^{n}. Отметим, что средняя связность $\overset{0}{\nabla}$, как и связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, является эквиаффинной; последнее подтверждается и тем, что дополнительная форма Θ (см. (40)) в силу (1, 7, 34) есть полный дифференциал некоторой функции: $D\Theta = 0$. Следовательно, средняя аффинная связность $\overset{0}{\nabla}$ является римановой с полем метрического тензора Λ_{ij}^{n}.

Таким образом, справедливы следующие предложения.

Теорема 2. *Нормализация регулярной гиперповерхности* $V_{n\text{-}1} \subset K_n, n \geq 3$, *внутренним образом определяемая в 3-й дифференциальной окрестности полями квазитензоров* G_n^i *и* G_i, *кроме эквиаффинной связности первого рода* $\overset{1}{\nabla}$ *индуцирует эквиаффинную связность второго рода* $\overset{2}{\nabla}$, *двойственную первой.*

Теорема 3. *Эквиаффинные связности первого* $\overset{1}{\nabla}$ *и второго* $\overset{2}{\nabla}$ *родов, индуцируемые на гиперповерхности* $V_{n\text{-}1}$ *в проективно-метрическом пространстве* K_n, *нормализованной полями квазитензоров* G_n^i *и* G_i, *являются сопряженными относительно поля асимптотического тензора* Λ_{ij}^{n}.

Теорема 4. *Аффинная связность* $\overset{0}{\nabla}$, *средняя по отношению к эквиаффинным связностям первого* $\overset{1}{\nabla}$ *и второго* $\overset{2}{\nabla}$ *родов, является римановой с полем метрического тензора* Λ_{ij}^{n}.

Теорема 5. *Двойственные аффинные связности* $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$*, индуцируемые нормализацией регулярной гиперповерхности* $V_{n-1} \subset K_n, n \geq 3$ *полями квазитензоров* G_n^i, G_i*, совпадают тогда и только тогда, когда гиперповерхность вырождается в гиперквадрику (24).*

Последнее предложение непосредственно следует из соотношений $\overset{2}{\theta}{}_j^i = \overset{1}{\theta}{}_j^i + \frac{1}{n+1} \Lambda_n^{ik} D_{kjs}^n \omega_0^s$, которые получаются из (38) с использованием (26) строения тензора Дарбу гиперповерхности.

Список литературы

1. *Абруков Д. А.* Внутренняя геометрия поверхностей и распределений в проективно-метрическом пространстве. Чебоксары, 2003.
2. *Евтушик Л. Е.* и др. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. М., 1979. Т. 9.
3. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Моск. матем. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.
4. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.
5. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994.
6. *Столяров А. В.* Внутренняя геометрия проективно-метрического пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 32. Калининград, 2001. С. 94—101.
7. *Столяров А. В.* Двойственные проективно-метрические пространства, определяемые регулярной гиперповерхностью // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. 2009. №1 (61). С. 29—36.
8. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. М.; Л., 1948.

A. Stolyarov

AFFINE CONNECTIONS ON HYPERSURFACE
IN A PROJECTIVE-METRIC SPACE

We study questions of geometry of two dual equiaffine connections induced by the normalization of regular hypersurface immersed in a projective-metric space K_n, $n \geq 3$; the normalization defined internally in a differential neighborhood of the third order.