2. *Кириченко В.Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Проблемы геометрии. М.,1986. Т. 18. С. 25 – 72.

3. *Арсеньева О.Е., Кириченко В.Ф.* Автодуальная геометрия обобщенных эрмитовых поверхностей // Матем. сб.1998. Т. 189. №1. С. 21 – 44.

4. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.

5. *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Курс дифференциальной геометрии и топологии. М., 1980.

6. *Gray A.* Vector cross products on manifolds // Trans. Amer. Math. Soc.1969. V. 141. P. 465 – 504.

7. *Кириченко В.Ф.* Почти келеровы структуры, индуцированные 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. 1973. № 3. С. 70 – 75.

8. *Банару М.Б.* О спектрах важнейших тензоров 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Новейшие проблемы теории поля. Казань, 2000. С. 18 – 22.

9. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере. М., 1960.

10. *Gray A.* Some examples of almost Hermitian manifolds // Illinois Journal Math. 1966.V.10. №2. P. 353 – 366.

11. *Gray A.* Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products // Tôhoku Math. Journal. 1969. V. 21. P. 614 – 620.

12. *Кириченко В.Ф.* Устойчивость почти эрмитовых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Укр. геом. сборник. Харьков, 1982. Т. 25. С. 60 – 68.

13. *Кириченко В.Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. 1994. № 3. С. 6 – 13.

M. Banaru

ON A CLASS OF ALMOST HERMITIAN MANIFOLDS

A criterion for an arbitrary almost Hermitian manifold to possess a J-invariant Ricci tensor is established. Some new examples of six-dimensional almost Hermitian manifolds with a J-invariant Ricci tensor are given.

УДК 514.763.8

М.Б. Банару, Г.А. Банару

(Смоленский гуманитарный университет,
Смоленский государственный педагогический университет)

АКСИОМА *U*-КОСИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ И 6-МЕРНЫЕ ЭРМИТОВЫ ПОДМНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБРЫ ОКТАВ

Доказано, что всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли, удовлетворяющее аксиоме U-косимплектических гиперповерхностей, является келеровым многообразием.

Работа [1] посвящена 6-мерным эрмитовым (общего типа) подмногообразиям алгебры Кэли. Основным ее результатом является теорема о том, что если 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры октав удовлетворяет аксиоме G-косимплектических гиперповерхностей, то оно является келеровым. В данной статье этот результат подтверждается.

Пусть N – ориентируемая гиперповерхность почти эрмитова многообразия M^{2n}. Как известно, на N внутренним образом индуцируется почти контактная метрическая структура. Напомним [2], что почти контактной метрической структурой на нечетномерном многообразии N называется такая система $\{\Phi,\xi,\eta,g\}$ тензорных полей, где ξ – векторное поле; η – ковекторное поле, Φ – поле тензора типа $(1,1)$, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ – риманова метрика. При этом выполняются условия:

$$\eta(\xi)=1;\ \Phi(\xi)=0;\ \eta\circ\Phi=0;\ \Phi^2=-id+\xi\otimes\eta;$$
$$\langle\Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y);\ X,Y\in\aleph(N),$$

где $\aleph(N)$ – модуль гладких векторных полей на многообразии N.

Почти контактная метрическая структура называется косимплектической [2], если $\nabla\eta=\nabla\Phi=0$, где ∇ – риманова связность метрики $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$. Напомним также, что почти эрмитово многообразие удовлетворяет аксиоме U-косимплектических (G-косимплектических) гиперповерхностей, если через всякую его точку проходит вполне омбилическая (вполне геодезическая) гиперповерхность.

Основной результат данной работы содержит следующую теорему

Теорема. *Всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли, удовлетворяющее аксиоме U-косимплектических гиперповерхностей, является келеровым многообразием.*

Доказательство. Пусть M^6 – 6-мерное эрмитово (общего типа) подмногообразие алгебры октав. Тогда на его ориентируемой гиперповерхности H индуцируется почти контактная метрическая структура. Первая группа структурных уравнений такой структуры имеет вид [3; 4]:

$$d\omega^\alpha=\omega^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta+B^{\alpha\beta}{}_\gamma\omega^\gamma\wedge\omega_\beta+\left(\sqrt{2}B^{\alpha3}{}_\beta+i\sigma^\alpha_\beta\right)\omega^\beta\wedge\omega+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B^{\alpha\beta}{}_3+i\sigma^{\alpha\beta}\right)\omega_\beta\wedge\omega;$$

$$d\omega_\alpha=-\omega^\beta_\alpha\wedge\omega_\beta+B_{\alpha\beta}{}^\gamma\omega_\gamma\wedge\omega^\beta+\left(\sqrt{2}B_{\alpha3}{}^\beta-i\sigma^\beta_\alpha\right)\omega_\beta\wedge\omega+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B_{\alpha\beta}{}^3-i\sigma_{\alpha\beta}\right)\omega^\beta\wedge\omega;\quad(1)$$

$$d\omega=\left(\sqrt{2}B^{3\alpha}{}_\beta-\sqrt{2}B_{3\beta}{}^\alpha-2i\sigma^\alpha_\beta\right)\omega^\beta\wedge\omega_\alpha+\left(B_{3\beta}{}^3+i\sigma_{3\beta}\right)\omega\wedge\omega^\beta+\left(B^{3\beta}{}_3-i\sigma^\beta_3\right)\omega\wedge\omega_\beta.$$

Через σ обозначена вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности H в многообразие M^6; $B^{ab}{}_c$ и $B_{ab}{}^c$ – компоненты виртуальных тензоров Кириченко [5]. Здесь и далее $i=\sqrt{-1}$; $\alpha,\beta,\gamma=1,2$; a, b, c = 1, 2, 3.

Сопоставляя (1) с первой группой структурных уравнений косимплектической структуры [2]:

$$d\omega^\alpha=\omega^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta,\ d\omega_\alpha=-\omega^\beta_\alpha\wedge\omega_\beta,\ d\omega=0,$$

получаем условия, одновременное выполнение которых есть критерий того, что почти контактная метрическая структура на H является косимплектической:

$$1)\ B^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = 0;\ 2)\ \sqrt{2}B^{\alpha 3}{}_{\beta} + i\sigma^{\alpha}_{\beta} = 0;\ 3)\ -\frac{1}{\sqrt{2}}B^{\alpha\beta}{}_{3} + i\sigma^{\alpha\beta} = 0;$$
$$4)\ \sqrt{2}B^{3\alpha}{}_{\beta} - \sqrt{2}B_{3\beta}{}^{\alpha} - 2i\sigma^{\alpha}_{\beta} = 0;\ 5)\ B^{3\beta}{}_{3} - i\sigma^{\beta}_{3} = 0 \qquad (2)$$

и формулы комплексного сопряжения (ф.к.с.), запись которых мы опустим. Из (2) следует, что матрица второй квадратичной формы погружения H в M^6 имеет вид:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -iD_{\hat{1}\hat{2}} & iD_{\hat{2}\hat{2}} \\ 0 & 0 & 0 & -iD_{\hat{1}\hat{1}} & iD_{\hat{1}\hat{2}} \\ 0 & 0 & \sigma_{33} & 0 & 0 \\ -iD_{12} & -iD_{22} & 0 & 0 & 0 \\ iD_{11} & iD_{12} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$D_{ab} = \pm T_{ab}{}^{8} + iT_{ab}{}^{7},\ D^{ab} = D_{\hat{a}\hat{b}} = \pm T_{\hat{a}\hat{b}}{}^{8} - iT_{\hat{a}\hat{b}}{}^{7}.$$

Здесь $\{T^{\varphi}_{kj}\}$ – компоненты конфигурационного тензора [6] эрмитова подмногообразия M^6 алгебры Кэли; k, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6; $\hat{a} = a+3$; $\varphi = 7, 8$.

Если H – вполне омбилическая гиперповерхность, то матрица σ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda - const.$$

Поэтому, принимая во внимание тождества [7] $(D_{12})^2 = D_{11}D_{22}$, $(D_{\hat{1}\hat{2}})^2 = D_{\hat{1}\hat{1}}D_{\hat{2}\hat{2}}$ и условия (2), получаем

$$D_{kj} = 0. \qquad (3)$$

Итак, мы показали, что (3) имеет место в каждой точке вполне омбилической гиперповерхности эрмитова подмногообразия M^6 алгебры Кэли. Таким образом, если M^6 удовлетворяет аксиоме U-косимплектических гиперповерхностей, то условие (3) выполняется в каждой его точке. Но это условие есть критерий келеровости произвольного 6-мерного почти эрмитова подмногообразия алгебры октав [8]. Следовательно, если эрмитово M^6 удовлетворяет аксиоме U-косимплектических гиперповерхностей, то оно – келерово, что и требовалось доказать.

Список литературы

1. *Banaru M.* On six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra satisfying the G-cosymplectic hypersurfaces axiom // Annaire de l'un*iversite de* Sofia "St. Kl. OHRIDSKI". 2000. T. 94. P. 91–96.

2. *Кириченко В.Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Проблемы геометрии. М., 1986. Т. 18. С. 25 – 71.

3. *Степанова Л.В.* Квазисасакиева структура на гиперповерхностях эрмитовых многообразий // Науч. тр. МПГУ. М., 1995. С. 187–191.

4. *Степанова Л.В., Банару М.Б.* О квазисасакиевых и косимплектических гиперповерхностях специальных эрмитовых многообразий // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2001. №32. С. 87 – 93.

5. *Банару М.Б.* Тензоры Кириченко // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям. Смоленск, 2000. Вып.2. С. 42–48.

6. *Gray A.* Some examples of almost Hermitian manifolds // Illinois Journal Math. 1966. V10. №2. P. 353–366.

7. *Banaru M.* Six theorems on six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Изв. АН Республики Молдова. 2000. №3. С. 3–10.

8. *Кириченко В.Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Мат. 1980. №8. С. 32 – 38.

G.Banaru, M. Banaru

THE *U*-COSYMPLECTIC HYPERSURFACES AXIOM AND SIX-DIMENSIONAL HERMITIAN SUBMANIFOLDS OF THE OCTAVE ALGEBRA

It is proved that if a six-dimensional Hermitian submanifold of Cayley algebra satisfies the *U*-cosymplectic hypersurfaces axiom, then it is a Kählerian manifold.

УДК 514.75

О.О. Белова

(Калининградский государственный университет)

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СВЯЗНОСТИ 1-ГО ТИПА В РАССЛОЕНИИ НАД ГРАССМАНОВЫМ МНОГООБРАЗИЕМ

Дана геометрическая характеристика результатов, полученных в статьях [1; 2].

В проективном пространстве P_n, отнесенном к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ с деривационными формулами

$$dA=\theta A+\omega^I A_I,\ dA_I=\theta A_I+\omega_I^J A_J+\omega_I A$$

и структурными уравнениями проективной группы GP(n):

$$D\omega^I=\omega^J\Lambda\omega_J^I,\quad D\omega_I=\omega_I^J\Lambda\omega_J\quad (I,J,K=\overline{1,n});$$

$$D\omega_J^I=\omega_J^K\Lambda\omega_K^I+\delta_J^I\omega_K\Lambda\omega^K+\omega_J\Lambda\omega^I,$$

рассмотрено многообразие Грассмана V=Gr(m,n) m-мерных плоскостей L_m. Осуществлена специализация подвижного репера $\{A,A_a,A_\alpha\}$: вершины A,A_a помещены на плоскость L_m. Над многообразием Грассмана V построено главное расслоение G(V), типовой слой которого – подгруппа стационарности G плоскости L_m. Расслоение G(V) содержит главное подрасслоение P(V) с типовым слоем