где обозначено $\omega_i = \omega_i^4$, $\Omega_1 = \omega_1^1 + \omega_3^3 - 2\omega_2^2$, $\Omega_2 = \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_4^4$ ($i,j,k = 1,2$; $i \neq j$, по i,j не суммировать).

Доказано, что конгруэнции H^Q существуют и определяются с произволом семи функций двух аргументов.

Определение 2. Парой H_0^Q называется такая пара H^Q, для которой: 1) прямые A_1A_2, A_3A_4 и точки A_3, A_4 полярно сопряжены относительно квадрики Q; 2) поверхность (A_4) является огибающей семейства плоскостей коник C_2, для которой линии A_4A_i есть асимптотические касательные.

Из определения пары H_0^Q следует, что она характеризуется соотношениями: $a = b = c = 0$, $\omega_4^3 = 0$, $\Gamma_1^{32} = \Gamma_2^{31} = 0$. Замыкая уравнение $\omega_4^3 = 0$, имеем $\Gamma_1^{31} = \Gamma_2^{32} \overset{def}{=} \gamma$. Система пфаффовых уравнений пары H_0^Q запишется в виде

$$\begin{cases} \omega_i^j = 0, \quad \omega_4^i = \omega_j, \quad \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \quad \omega_3^i = k\omega_j^3, \quad \omega_i^3 = \gamma\omega_i, \quad \Omega_2 = 0, \\ \Omega_1 = a^k\omega_k, \quad dk = 2k(\omega_3^3 - \omega_4^4), \quad d\gamma = \gamma(\omega_4^4 - \omega_3^3). \end{cases} \tag{2}$$

Анализируя систему (2), убеждаемся, что конгруэнции H_0^Q существуют с произволом одной функции двух аргументов.

Теорема. Для конгруэнции H_0^Q справедливы следующие свойства: 1) прямые (A_iA_3), (A_iA_4) образуют одномерные многообразия; 2) плоскости $(A_iA_3A_4)$ описывают однопараметрические семейства; 3) пара прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4) односторонне расслояема в направлении от (A_3A_4) к (A_1A_2); 4) поверхность (A_3) – характеристическая; 5) асимптотические линии на поверхностях (A_3) и (A_4) соответствуют; 6) точки A_1 и A_3 являются фокальными точками коники $C_1 \in (C_1)$; 7) поверхности (A_3) и (A_4) являются невырожденными инвариантными квадриками, причем все три квадрики Q, (A_3) и (A_4) касаются инвариантного конуса K вдоль одной и той же коники C_3; 8) (A_i) – линия, совпадающая с коникой C_3.

Поверхности Q, (A_3) и (A_4) определяются соответственно уравнениями

$$(x^4)^2 - 2x^1x^2 + k(x^3)^2 = 0,$$

$$(1 - k\gamma^2)(x^4)^2 - 2x^1x^2 + 2k\gamma x^3x^4 = 0,$$

$$(k\gamma^2 - 1)(x^3)^2 - 2\gamma^2x^1x^2 + 2\gamma x^3x^4 = 0.$$

Все три квадрики Q, (A_3) и (A_4) пересекаются по одной и той же конике.

Уравнение конуса K, которого касаются все квадрики Q, (A_3) и (A_4) вдоль коники C_3, имеет вид $k^2\gamma^2(x^3)^2 + (x^4)^2 - 2(1 + k\gamma^2)x^1x^2 + 2k\gamma x^3x^4 = 0$.

Библиографический список

1. Корсакова Л.Г. Об одном классе конгруэнций пар коник в P_3 // Тезисы докл. VI Прибалт. геометр. конф. Таллин, 1984. С. 63.

УДК 514.75

О КОНГРУЭНЦИЯХ ОРИЦИКЛОВ И ОРИСФЕР В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

В.С. Малаховский
(Калининградский государственный университет)

Получены структурные формы орицикла и орисферы в интерпретации Кэли-Клейна геометрии Лобачевского. Исследованы фокальные многообразия конгруэнций орициклов и орисфер. Доказано, что конгруэнция орициклов имеет не более трех собственных фокальных поверхностей. Рассмотрены некоторые подклассы конгруэнций.

1. Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3 невырожденную нелинейчатую квадрику Q_0 и примем ее за абсолют пространства $Л_3$. В интерпретации Кэли-Клейна точки пространства $Л_3$ интерпретируются внутренними точками абсолюта, прямые – хордами абсолюта, причем точки абсолюта Q_0 являются несобственными точками расширенного пространства $Л_3$.

Орицикл C интерпретируется специальным типом нераспадающейся кривой второго порядка, касающейся абсолюта Q_0 в одной из его точек A_0 и расположенной внутри абсолюта, а орисфера S – невырожденной нелинейчатой квадрикой, касающейся Q_0 в точке A_0 и также лежащей внутри абсолюта [1]. Так как орицикл (орисфера) является кривой (поверхностью), ортогональной ко всем прямым пучка (связки) параллельных в заданном направлении прямых пространства $Л_3$, т.е. хорд абсолюта Q_0 с общим концом A_0, то для любой точки $M \in C$ ($M \in S$) полюс A_M касательной к орициклу C (касательной плоскости к орисфере S) в точке M относительно сечения Γ абсолюта Q_0 плоскостью орицикла C (соответственно относительно абсолюта Q_0) лежит на прямой A_0M.

Отнесем орицикл C (орисферу S) к реперу $R = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_3 – произвольная точка сечения Γ (абсолюта Q_0), A_1 и A_2 полярно сопряжены между собой и расположены на прямой, полярно сопряженной прямой A_0A_3 относительно абсолюта, причем в случае орицикла точка A_1 лежит в его плоскости. Осуществляя надлежащую нормировку вершин репера и требуя, чтобы $A_M \in A_0M$ для любой точки M орицикла C (соответственно орисферы S), приведем уравнения абсолюта, орицикла и орисферы соответственно к виду:

$$\mathcal{F} \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 - 2x^0x^3 = 0, \tag{I.I}$$

$$f \equiv (x^3)^2 + \tfrac{1}{2}(x^1)^2 - x^0x^3 = 0, \quad x^2 = 0; \tag{I.2}$$

$$\Phi \equiv (x^3)^2 + \tfrac{1}{2}(x^1)^2 + \tfrac{1}{2}(x^2)^2 - x^0x^3 = 0. \tag{I.3}$$

Уравнения инвариантности абсолюта Q_0 запишутся в виде:

$$\begin{cases} \omega_i^3 = \omega_0^i, \quad \omega_3^i = \omega_i^0, \quad \omega_3^0 = 0, \; \omega_0^3 = 0, \; \omega_1^2 + \omega_2^1 = 0, \\ \omega_2^2 = \omega_1^1, \quad \omega_0^0 + \omega_3^3 = 2\omega_2^2, \quad i,j = 1,2. \end{cases} \tag{I.4}$$

Дифференцируя (I.2),(I.3) с учетом (I.4); получим

$$\begin{cases} df\big|_{x^2=0} = \lambda f + (\omega_0^0 - \omega_3^3)(x^3)^2 - 2\omega^1x^1x^3, \\ dx^2\big|_{x^2=0} = -x^0\omega^2 - x^1\omega_1^2 - x^3\omega_2^0, \end{cases} \tag{I.5}$$

$$d\Phi = \mu\Phi + (\omega_0^0 - \omega_3^3)(x^3)^2 - 2\omega^1x^1x^3 - 2\omega^2x^2x^3, \tag{I.6}$$

где

$$\omega^i \overset{def}{=} \omega_0^i. \tag{I.7}$$

Из (I.5),(I.6) следует, что формы Пфаффа

$$\omega^1, \; \omega^2, \; \omega_1^2, \; \omega_2^0, \; \omega_0^0 - \omega_3^3 \tag{I.8}$$

являются структурными формами орицикла C, а формы Пфаффа

$$\omega^1, \; \omega^2, \; \omega_0^0 - \omega_3^3 \tag{I.9}$$

-структурными формами орисферы. Следовательно, орицикл является фигурой ранга $N=5$, а орисфера фигурой ранга $N=3$. Этот факт допускает простую геометрическую интерпретацию: каждая точка A_0 абсолюта является центром двупараметрического семейства пучков параллельных прямых (центром связки параллельных прямых), а каждый такой пучок (каждая связка) определяет однопараметрическое семейство орициклов (орисфер).

2. Принимая структурные формы ω^i за независимые, запишем систему уравнений Пфаффа конгруэнции (C) орициклов в виде (I.4) и уравнений:

$$\omega_1^2 = a_k\omega^k, \quad \omega_2^0 = b_{2k}\omega^k, \quad \omega_0^0 - \omega_3^3 = c_k\omega^k. \tag{2.I}$$

Система уравнений для определения фокальных точек орицикла C и фокальных семейств конгруэнции (C) имеет вид:

$$\begin{cases} \tfrac{1}{2}(x^1)^2 + (x^3)^2 - x^0x^3 = 0, \quad x^2 = 0, \\ c_k\omega^k(x^3)^2 - 2x^1x^3\omega^1 = 0, \quad x^0\omega^2 + a_k\omega^kx^1 + b_{2k}\omega^kx^3 = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Анализируя эту систему, приходим к следующему результату.

Т е о р е м а 1. Несобственная точка A_0 орицикла C конгруэнции (C) является ее трехкратной (но не четырехкратной) фокальной точкой. Конгруэнция (C) имеет в общем случае три собственные фокальные поверхности.

Направляя ребро A_0A_3 репера через одну из собственных фокальных точек орицикла C, получим

$$(b_{22} - 1)c_1 - b_{21}c_2 = 0. \tag{2.3}$$

В построенном каноническом репере единичная точка E ребра A_0A_3 совпадает с выбранной фокальной точкой орицикла C:

$$E = A_0 + A_3, \tag{2.4}$$

причем

$$\omega_1^0 = b_{1k}\omega^k. \tag{2.5}$$

Условия

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0 \tag{2.6}$$

выделяют подкласс конгруэнций орициклов, характеризующийся тем, что касательная плоскость к поверхности (E) содержит ребро A_1A_2. Такие конгруэнции определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Конгруэнция орисфер определяется одним уравнением Пфаффа:

$$\omega_0^0 - \omega_3^3 = c_k\omega^k. \tag{2.7}$$

Из (I.6),(2.7) следует, что координаты фокальных точек орисферы $S \in (S)$ удовлетворяют системе уравнений

$$x^3(c_1x^3 - 2x^1) = 0, \quad x^3(c_2x^3 - 2x^2) = 0. \tag{2.8}$$

Анализируя систему (I.3),(2.8), приходим к теореме 2 работы [2].

Т е о р е м а 2. Фокальное многообразие конгруэнции орисфер состоит из пары мнимых несобственных прямых

$$x^1 + ix^2 = 0, \quad x^3 = 0; \quad x^1 - ix^2 = 0, \quad x^3 = 0, \tag{2.9}$$

7 Зак. 1209

пересекающихся в точке A_0, и единственной собственной точки

$$\mathcal{F} = \left(2 + \tfrac{1}{4}(c_1)^2 + \tfrac{1}{4}(c_2)^2\right)A_0 + c_1 A_1 + 2A_3. \qquad (2.10)$$

Совмещая ребро A_0A_3 с прямой $A_0\mathcal{F}$ и выбирая A_1 в точке пересечения касательных плоскостей к абсолюту Q_0 в A_0 и A_3 и к орисфере S в точке $\mathcal{F}$, построим канонический репер конгруэнции орисфер. В этом репере фокальная точка $\mathcal{F}$ является единичной точкой ребра A_0A_3.

Библиографический список

1. Е ф и м о в Н.В. Высшая геометрия/ М.: ГИТТЛ, 1953.

2. А р т е м о в а И.Н. Конгруэнции орисфер в пространстве Лобачевского//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1986. Вып. 17. С. 9-10.

УДК 514.75

НОРМАЛИЗАЦИЯ ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА, ПОРОЖДЕННЫЕ СЕМЕЙСТВОМ КОЛЛИНЕАЦИЙ

Н.В. М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)

Продолжается, начатое в [1], исследование n-параметрических семейств Π_n коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to P_n$ n-мерных проективных пространств, отображающих заданную точку $P^\circ \in \mathcal{P}_n$ в заданную точку $p^\circ \in P_n$. Доказано, что поле фундаментального объекта второго порядка семейства Π_n определяет пучок инвариантных нормализаций каждого из пространств $\mathcal{P}_n$, P_n. Получена геометрическая характеристика гиперплоскостей, осуществляющих эти нормализации. Каждой характеристической прямой ассоциированного точечного отображения $\varphi: \mathcal{P}_n \to P_n$ семейство Π_n ставит в соответствие единственное число $\sigma \in \mathbb{R}$ (характеристическое число). В работе использованы обозначения и формулы из [1].

§1. Пучок нормализаций, порожденный семейством коллинеаций Π_n.

Продолженная система уравнений Пфаффа семейства коллинеаций Π_n имеет вид ([1], (1.6)-(1.9)):

$$\begin{cases} \omega^i = \lambda^i_j \Omega^j, \quad \nabla M^i_j = M^i_{jk}\Omega^k, \quad \nabla P_j + \Omega^\circ_j - M^k_j \omega^\circ_k = P_{jk}\Omega^k, \\ \nabla \lambda^i_j = \lambda^i_{jk}\Omega^k, \quad \Delta M^i_{jk} = M^i_{jkl}\Omega^l, \quad \Delta\lambda^i_{jk} = \lambda^i_{jkl}\Omega^l, \\ \Delta P_{jk} = P_{jkl}\Omega^l, \quad \Delta M^i_{jkl} = M^i_{jklh}\Omega^h, \quad \Delta P_{jkl} = P_{jklh}\Omega^h. \end{cases} \qquad (1.1)$$

Учитывая, что $\det(\lambda^i_j) \neq 0$, $\det(M^i_j) \neq 0$, $\det(\tilde{\lambda}^i_j) \neq 0$ $(\tilde{\lambda}^i_j = M^i_j - \lambda^i_j)$, рассмотрим системы величин

$$\Gamma^l_{jk} = \overset{*}{\lambda}{}^l_i \lambda^i_{jk}, \quad G^l_{jk} = \overset{*}{M}{}^l_i M^i_{jk}, \qquad (1.2)$$

$$\Gamma_j = \Gamma^k_{kj}, \quad G_j = G^k_{kj}, \qquad (1.3)$$

$$\nu_i = \overset{*}{\lambda}{}^j_i \left(P_j - \tfrac{1}{n+1}\Gamma_j\right), \qquad (1.4)$$

$$N_i = \overset{*}{\tilde{\lambda}}{}^j_i \left(P_j - \tfrac{1}{n+1} G_j\right), \qquad (1.5)$$

где $\overset{*}{\lambda}{}^l_i$, $\overset{*}{M}{}^l_i$, $\overset{*}{\tilde{\lambda}}{}^j_i$ взаимные тензоры соответственно к тензорам λ^i_j, M^i_j, $\tilde{\lambda}^i_j$. Имеем:

$$\nabla\Gamma^l_{jk} = -\delta^l_{(j}\Omega^\circ_{k)} + \delta^l_{(j}\lambda^i_{k)}\omega^\circ_i + \Gamma^l_{jkh}\Omega^h, \qquad (1.6)$$

$$\nabla G^l_{jk} = -\delta^l_{(j}\Omega^\circ_{k)} + \delta^l_{(j}\lambda^i_{k)}\omega^\circ_i + G^l_{jkh}\Omega^h, \qquad (1.7)$$

$$\nabla\Gamma_j = (n+1)(\lambda^i_j\omega^\circ_i - \Omega^\circ_j) + \Gamma_{jk}\Omega^k, \qquad (1.8)$$

$$\nabla G_j = (n+1)(\lambda^i_j\omega^\circ_i - \Omega^\circ_j) + G_{jk}\Omega^k, \qquad (1.9)$$

$$\nabla\nu_i = \omega^\circ_i + \nu_{ik}\Omega^k, \qquad (1.10)$$

$$\nabla N_i = \omega^\circ_i + N_{ik}\Omega^k. \qquad (1.11)$$

Следовательно, системы величин $\{\nu_i\}$ и $\{N_i\}$ являются квазитензорами. Каждый из них определяет для данной точки $p^\circ \in P_n$ инвариантную гиперплоскость в P_n, не инцидентную точке p°:

$$\nu_i x^i + 1 = 0, \qquad (1.12)$$

$$N_i x^i + 1 = 0, \qquad (1.13)$$

то есть нормализацию проективного пространства P_n, порожденную семейством Π_n коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to P_n$. В общем случае нормали (1.12), (1.13) определяют для каждой точки p° пучок инвариантных нормалей

$$(\nu_i + \sigma(N_i - \nu_i))x^i + 1 = 0, \qquad (1.14)$$

где $\sigma \in \mathbb{R}$. Гиперплоскости в $\mathcal{P}_n$, являющиеся прообразами нормалей (1.12), (1.13) при коллинеации π, определяются уравнениями

$$(\nu_i M^i_j - P_j)X^j + 1 = 0, \qquad (1.15)$$

$$(N_i M^i_j - P_j)X^j + 1 = 0, \qquad (1.16)$$

которые подобно (1.14) определяют в $\mathcal{P}_n$ пучок инвариантных нормалей для точки P°. Получаем

П р е д л о ж е н и е 1.1. Поле фундаментального объекта второго порядка семейства Π_n коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to P_n$

7*