

М. Б. Банару

Смоленский государственный университет, Россия

mihail.banaru@yahoo.com

doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-4

Пример неустойчивой эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав

Установлено, что эрмитова структура на скрученном произведении двумерного комплексного евклидова пространства S^2 и комплексного гиперболического пространства CH^1 не является устойчивой.

Ключевые слова: алгебра Кэли, 6-мерное подмногообразие алгебры октав, устойчивость почти эрмитовой структуры

1. В 60-х годах прошлого века выдающийся американский геометр Альфред Грей установил [1], что каждое из двух так называемых 3-векторных произведений в алгебре Кэли порождает на ее 6-мерном подмногообразии почти эрмитову структуру. Значительные результаты в исследовании таких структур получил замечательный отечественный геометр Вадим Федорович Кириченко, статьи которого в 1970—1990-х гг. обобщали, усиливали и развивали идеи Альфреда Грея. В.Ф. Кириченко обратил внимание на следующий результат А. Грея: почти эрмитовы структуры, порожденные разными 3-векторными произведениями в алгебре октав на одном и том же подмногообразии, могут существенно отличаться друг от друга. Например, одна из таких почти эрмитовых структур может быть келеровой, а другая — нет [1]. В.Ф. Кириченко ввел понятие устойчивости для почти эрмитовой структуры на 6-мер-

Поступила в редакцию 17.04.2025 г.

© Банару М. Б., 2025

ном подмногообразии алгебры Кэли. А именно, почти эрмитову структуру на 6-мерном подмногообразии алгебры октав он назвал устойчивой, если двойственная ей структура (то есть структура, порожденная другим 3-векторным произведением в алгебре Кэли) принадлежит тому же классу почти эрмитовых структур [2]. Наиболее подробно результаты, связанные и устойчивостью почти эрмитовых структур на 6-мерных подмногообразиях алгебры октав, изложены в работе [3].

В статье [4] был рассмотрен вопрос об устойчивости эрмитовых структур на 6-мерных уплощающихся подмногообразиях алгебры Кэли. В настоящей работе приводится конкретный пример неустойчивой эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры Кэли, а именно на одном из локально симметрических подмногообразий алгебры октав.

2. Известно [5], что почти эрмитовой (almost Hermitian, АН-) структурой на многообразии M^{2n} четной размерности называется пара $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, где J — почти комплексная структура, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ должны быть согласованы следующим условием:

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^{2n}),$$

где $\mathfrak{X}(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на рассматриваемом многообразии M^{2n} . Многообразие с фиксированной на нем АН-структурой называется *почти эрмитовым* (АН-) многообразием. АН-многообразие называется *эрмитовым*, если его почти комплексная структура интегрируема.

Напомним также о явном виде 3-векторных произведений Грея в алгебре октав [1]:

$$P_1(X, Y, Z) = -X(\bar{Y}Z) + \langle X, Y \rangle Z + \langle Y, Z \rangle X - \langle Z, X \rangle Y;$$

$$P_2(X, Y, Z) = -(X\bar{Y})Z + \langle X, Y \rangle Z + \langle Y, Z \rangle X - \langle Z, X \rangle Y.$$

Здесь $\mathbf{O} \equiv \mathbf{R}^8$ — алгебра Кэли; $X, Y, Z \in \mathbf{O}$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{O}$; $X \rightarrow \bar{X}$ — оператор сопряжения в $\mathbf{O}$.

В статье [6] В. Ф. Кириченко получены структурные уравнения произвольной почти эрмитовой структуры, индуцированной 3-векторными произведениями в алгебре Кэли на ее 6-мерном подмногообразии общего типа. Для случая эрмитовой структуры эти уравнения были уточнены [7—9]. Оказалось, что они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b; \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b; \\ d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2} \delta_{bg}^{ah} D_{hd} D^{gc} + \sum_{\phi} T_{a\phi}^{\phi} T_{bd}^{\phi} \right) \omega_c \wedge \omega^d, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\{\omega^k\}$ — компоненты форм смещения, $\{\omega_j^k\}$ — компоненты форм римановой связности. Здесь и далее индексы принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} \varphi &= 7, 8; \quad a, b, c, d, g, h = 1, 2, 3; \quad \alpha, \beta = 2, 3; \\ \hat{a} &= a + 3; \quad k, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{aligned}$$

Как и в [7; 10], $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$. При этом

$$\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc}^{123}, \quad \varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}^{abc}$$

— компоненты тензора Кронекера третьего порядка;

$$\delta_{bg}^{ah} = \delta_b^a \delta_g^h - \delta_g^a \delta_b^h;$$

$$D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}}; D_{cj} = \mp T_{cj}^8 + iT_{cj}^7, \quad D_{\hat{c}j} = \mp T_{\hat{c}j}^8 - iT_{\hat{c}j}^7,$$

где $\{T_{kj}^{\varphi}\}$ — компоненты конфигурационного тензора (в терминологии Грея), или второй основной формы погружения подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$.

3. Важную роль в эрмитовой геометрии 6-мерных многообразий играют локально симметрические подмногообразия алгебры октав. Им посвящены работы [7; 10], а самая значи-

тельная статья по этой тематике принадлежит, на наш взгляд, В. Ф. Кириченко [11]. В ней введены в рассмотрение и исследованы 6-мерные типа Риччи эрмитовы подмногообразия алгебры Кэли. В частности, получен пример 6-мерного типа Риччи подмногообразия алгебры октав с нетривиальной (то есть отличной от келеровой) эрмитовой структурой. Таким примером является так называемое скрученное (warped) произведение двух келеровых многообразий — двумерного комплексного евклидова пространства C^2 и комплексного гиперболического пространства CH^1 .

Оказалось [11; 12], что матрица (D_{ab}) при определенном выборе репера для такого подмногообразия алгебры октав имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем $D_{11} \neq 0$.

Поэтому мы можем переписать первую группу структурных уравнений (1) для упомянутого выше 6-мерного типа Риччи эрмитова подмногообразия алгебры октав в следующем виде:

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= \omega_1^1 \wedge \omega^1; \\ d\omega_1 &= -\omega_1^1 \wedge \omega_1; \\ d\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{1\alpha\beta} D_{11} \omega^1 \wedge \omega_\beta; \\ d\omega_\alpha &= -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{1\alpha\beta} D^{11} \omega_1 \wedge \omega^\beta. \end{aligned}$$

Из построений Кириченко [3] вытекает, что необходимым условием устойчивости эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав является следующий вид первой группы ее структурных уравнений:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b; \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b. \end{aligned} \tag{2}$$

В силу того, что $D_{11} \neq 0$, коэффициенты

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{1\alpha\beta} D_{11} \text{ и } \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{1\alpha\beta} D^{11}$$

являются отличными от нуля, условия (2) не могут выполняться для рассматриваемого локально симметрического подмногообразия $M^6 \subset O$, а потому справедлива

Теорема. *Эрмитова структура на скрученном произведении двумерного комплексного евклидова пространства C^2 и комплексного гиперболического пространства CH^1 не является устойчивой.*

Отметим, что данная теорема дополняет дифференциально-геометрические построения В. Ф. Кириченко, имеющие отношение к устойчивости почти эрмитовых структур на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли [3; 4]. Кроме того, этот результат можно рассматривать как развитие представлений о конкретных примерах 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав. Это направление эрмитовой геометрии, заложенное классической работой А. Грея [13], в последнее время интенсивно развивается, к сожалению, лишь для 6-мерных подмногообразий с приближенно келеровой структурой (см. обзоры [14; 15]).

Список литературы

1. Gray A. Vector cross products on manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 141. P. 465—504.
2. Кириченко В. Ф. Устойчивость почти эрмитовых структур на подмногообразиях алгебры Кэли // УМН. 1980. Т. 35, №1. С. 199—200.
3. Кириченко В. Ф. Устойчивость почти эрмитовых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Украинский геометрический сборник. 1982. Т. 25. С. 60—68.
4. Банару М. Б., Банару Г. А. Об устойчивости эрмитовых структур на 6-мерных уплющающихся подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. 2021. Вып. 52. С. 23—29.

5. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.
6. *Кириченко В. Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Матем. 1980. №8. С. 32—38.
7. *Банару М. Б.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли : дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1993.
8. *Банару М. Б.* О косимплектических гиперповерхностях 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли // Изв. вузов. Матем. 2003. №7. С. 59—63.
9. *Банару М. Б., Банару Г. А.* Об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. 2017. Вып. 48. С. 21—25.
10. *Банару М. Б.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Матем. сб. 2002. Т. 193, №5. С. 3—16.
11. *Кириченко В. Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли // Вестник Московского ун-та. Сер. Матем. Механ. 1994. №3. С. 6—13.
12. *Банару М. Б.* О локально симметрических 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. 2016. Вып. 47. С. 11—17.
13. *Gray A.* Some examples of almost Hermitian manifolds // Illinois J. Math. 1966. Vol. 10, №2. P. 353—366.
14. *Банару М. Б.* Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2014. Т. 126. С. 10—61.
15. *Банару М. Б.* О шестимерной сфере с приближенно келеровой структурой // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2018. Т. 146. С. 3—16.

Для цитирования: *Банару М. Б.* Пример неустойчивой эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав // ДГМФ. 2025. №56. С. 28—35. doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-4.



MSC 2010: 53B35, 53B25

M. B. Banaru

Smolensk State University

4 Przhivalskogo St., Smolensk, 214000, Russia

mihail.banaru@yahoo.com

doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-4

An example of an unstable Hermitian structure
on a 6-dimensional submanifold of the octave algebra

Submitted on April 17, 2025

It is known that each of the two so-called Gray — Brown 3-fold vector cross products in the Cayley algebra induces an almost Hermitian structure on its 6-dimensional oriented submanifold. As it is also known, the almost Hermitian structures induced by different 3-fold vector cross products in the octave algebra on the same submanifold can differ significantly from each other. For example, one of these almost Hermitian structures can be Kählerian, while the other is not. Such an almost Hermitian structure is called stable if its dual structure (that is, the structure induced by another 3-fold vector cross product in the Cayley algebra) belongs to the same Gray — Hervella class of almost Hermitian structures.

In the present note, we give a specific example of an unstable Hermitian structure on a 6-dimensional submanifold of the Cayley algebra, namely, on a locally symmetric submanifold of the octave algebra.

Keywords: Cayley algebra, 6-dimensional submanifold of Cayley algebra, stability of an almost Hermitian structure

References

1. Gray, A.: Vector cross products on manifolds. Trans. Amer. Math. Soc., 41, 465—504 (1969).
2. Kirichenko, V.F.: The stability of almost Hermitian structures on submanifolds of a Cayley algebra. Russian Math. Surveys, **35**:1, 215—216 (1980).

3. *Kirichenko, V.F.*: Stability of the almost Hermitian structures, defined by means of three-fold vector cross products on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. *Ukrain. Geom. Sbornik*, 25, 60—68 (1982).

4. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.*: On stability of Hermitian structures on 6-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra. *DGMF*, 52, 23—29 (2021).

5. *Kirichenko, V.F.*: Differential-geometric structures on manifolds. Odessa, 2013.

6. *Kirichenko, V.F.*: Classification of Kählerian structures, defined by means of three-fold vector cross products on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. *Izvestia Vuzov. Math.*, 8, 32—38 (1980).

7. *Banaru, M.B.*: Hermitian geometry of the 6-dimensional submanifolds of Cayley algebra. PhD thesis. Moscow State Pedagogical University V.I. Lenin (1993).

8. *Banaru, M.B.*: On skew-symplectic hypersurfaces of six-dimensional Kählerian submanifolds of the Cayley algebra. *Russian Math. (Izvestia Vuzov)*, 47:7, 60—63 (2003).

9. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.*: On planar 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. *DGMF*, 48, 21—25 (2017).

10. *Banaru, M.B.*: Hermitian geometry of 6-dimensional submanifolds of the Cayley algebra. *Sb. Math.*, 193:5—6, 635—648 (2002).

11. *Kirichenko, V.F.*: Hermitian geometry of six-dimensional symmetric submanifolds of the Cayley algebra. *Mosk. Univ. Bull. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 3, 6—13 (1994).

12. *Banaru, M.B.*: On locally symmetric 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. *DGMF*, 47, 11—17 (2016).

13. *Gray, A.*: Some examples of almost Hermitian manifolds. *Illinois J. Math.*, 10:2, 353—366 (1966).

14. *Banaru, M.B.*: Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra. *J. Math. Sci., New York*, 207:3, 354—388 (2015).

15. *Banaru, M.B.*: On the six-dimensional sphere with a nearly Kählerian structure. *J. Math. Sci., New York*, 245:5, 553—567 (2020).

For citation: Banaru, M.B.: An example of an unstable Hermitian structure on a 6-dimensional submanifold of the octave algebra. *DGMF*, 56, 28—35 (2025). doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-4.

