ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.3 1973

М А Х О Р К И Н В.В.

НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ МНОГООБРАЗИЙ ГИПЕРКВАДРИК

В данной работе исследуются многообразия гиперквадрик n-мерного проективного пространства. Введено понятие ассоциированных алгебраических многообразий. Рассмотрены некоторые классы многообразий. Для $(n-1)$-мерных многообразий гиперквадрик найден основной объект и доказано, в общем случае, существование 2^n фокальных поверхностей.

§I. Система дифференциальных уравнений многообразия гиперквадрик.

О п р е д е л е н и е. Многообразием $K(m,n)$ называется m-мерное подмногообразие невырожденных гиперквадрик n-мерного проективного пространства P_n.

Отнесем проективное пространство P_n к подвижному реперу $R = \{\bar{A}_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma,\ldots = 0,1,\ldots n)$. Деривационные формулы репера имеют вид:

$$d\bar{A}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{A}_\beta , \tag{1.1}$$

где инвариантные формы ω_α^β подчинены уравнениям Маурера-Картана проективной группы:

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta . \tag{1.2}$$

Уравнения стационарности гиперквадрики Q_{n-1}

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0 \tag{1.3}$$

имеют вид:

$$\Theta_{\alpha\beta} \equiv da_{\alpha\beta} - a_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma - a_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma = 0 , \tag{1.4}$$

где

$$\det \| a_{\alpha\beta} \| = 1 \tag{1.5}$$

Из уравнения (I.5) следует тождество (см. [I])

$$a_{\alpha\beta}\,\Theta^{\alpha\beta} \equiv 0 . \tag{1.6}$$

Система дифференциальных уравнений многообразия $K(m,n)$ запишется в виде:

$$\Theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta i}\tau^i \qquad (i,j,k = 1,2,\ldots,m), \tag{1.7}$$

где формы τ^i (см. [2]) являются инвариантными формами бесконечной аналитической группы преобразований m-мерного пространства параметров S_m и подчинены следующим структурным уравнениям (см. [2]),

$$\mathcal{D}\tau^i = \tau^k \wedge \tau_k^i , \tag{1.8}$$

$$\mathcal{D}\tau^i_j = \tau^k_j\wedge\tau^i_k + \tau^k\wedge\tau^i_{jk},$$

. . . . (1.8)

$$\mathcal{D}\tau^i_{j_1\dots j_\tau} = \sum_{s=1}^{\tau}\frac{\tau!}{s!(\tau-s)!}\tau^k_{(j_1\dots j_s}\wedge\tau^i_{j_{s+1}\dots j_\tau)k}+\tau^k\wedge\tau^i_{j_1\dots j_\tau k}.$$

Система уравнений (I.7) правильно продолжаема (см.[3]) и её последовательные продолжения приводят к бесконечной последовательности функций:

$$\Lambda_{\alpha\beta i_1},\ \Lambda_{\alpha\beta i_1 i_2},\ \dots,\ \Lambda_{\alpha\beta i_1\dots i_p},\ \dots \tag{1.9}$$

определяющих дифференциальную геометрию многообразия $K(m,n)$

Функции (I.9) удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$d\Lambda_{\alpha\beta i_1} = \Lambda_{\gamma\beta i_1}\omega^\gamma_\alpha + \Lambda_{\alpha\gamma i_1}\omega^\gamma_\beta + \Lambda_{\alpha\beta j}\tau^j_{i_1} + \Lambda_{\alpha\beta i_1 j}\tau^j,$$

$$d\Lambda_{\alpha\beta i_1 i_2} = \Lambda_{\gamma\beta i_1 i_2}\omega^\gamma_\alpha + \Lambda_{\alpha\gamma i_1 i_2}\omega^\gamma_\beta + \Lambda_{\alpha\beta j i_2}\tau^j_{i_1} +$$

$$+\Lambda_{\alpha\beta i_1 j}\tau^j_{i_2} + \Lambda_{\alpha\beta j}\tau^j_{i_1 i_2} + \Lambda_{\alpha\beta i_1 i_2 j}\tau^j, \tag{1.10}$$

. . . .

$$d\Lambda_{\alpha\beta i_1\dots i_p} = \Lambda_{\gamma\beta i_1\dots i_p}\omega^\gamma_\alpha + \Lambda_{\alpha\gamma i_1\dots i_p}\omega^\gamma_\beta +$$

$$+\sum_{s=1}^{p}\frac{\tau!}{s!(p-s)!}\Lambda_{\alpha\beta j(i_{s+1}\dots i_p}\tau^j_{i_1\dots i_s)} + \Lambda_{\alpha\beta i_1\dots i_p j}\tau^j,$$

где скобки в индексах означают симметрирование по всем индексам в них заключенным. Из уравнений (I.10) следует, что система величин:

$$(\Lambda_{\alpha\beta i_1}, \Lambda_{\alpha\beta i_1 i_2}, \dots, \Lambda_{\alpha\beta i_1\dots i_p}) \tag{1.11}$$

образует геометрический объект (см.[3]). Этот объект называется

фундаментальным объектом порядка p многообразия $K(m,n)$.

§2. Ассоциированные алгебраические многообразия.

Положим: $$N_p = m + \frac{m(m+1)}{2!} + \dots + \frac{m(m+1)\dots(m+p-1)}{p!}.$$

Рассмотрим фундаментальный объект порядка p многообразия $K(m,n)$ и обозначим:

$$F_{i_1} \equiv \Lambda_{\alpha\beta i_1}x^\alpha x^\beta,$$

$$F_{i_1 i_2} \equiv \Lambda_{\alpha\beta i_1 i_2}x^\alpha x^\beta, \tag{2.1}$$

$$F_{i_1\dots i_p} \equiv \Lambda_{\alpha\beta i_1\dots i_p}x^\alpha x^\beta.$$

Из (2.) и (I.10) следует, что

$$\delta F_{i_1} = \upsilon F_{i_1} + F_j\tau^j_{i_1},$$

$$\delta F_{i_1 i_2} = \upsilon F_{i_1 i_2} + F_{j i_2}\mathring{\tau}^j_{i_1} + F_{i_1 j}\tau^j_{i_2} + F_j\mathring{\tau}^j_{i_1 i_2}, \tag{2.2}$$

. . . .

$$\delta F_{i_1\dots i_p} = \upsilon F_{i_1\dots i_p} + \sum_{s=1}^{p}\frac{\tau!}{s!(p-s)!}\Lambda_{\alpha\beta j(i_{s+1}\dots i_p}\mathring{\tau}^j_{i_1\dots i_s)}x^\alpha x^\beta,$$

где υ некоторая дифференциальная I-форма, а нолик над формой означает фиксацию первичных параметров. Пусть $N_p < n$.

Система уравнений:

$$F_{i_1} = 0,\ F_{i_1 i_2} = 0,\ \dots,\ F_{i_1\dots i_p} = 0 \tag{2.3}$$

определяет инвариантное алгебраическое многообразие (см. [4])

О п р е д е л е н и е. Многообразие (2.3) называется характеристическим многообразием ранга p многообразия $K(m,n)$;

Обозначим многообразие (2.3) символом $\overset{(p)}{h}(m,n)$

Имеем для $q = 1, 2, \ldots, p$

$$\overset{(q)}{h}(m,n) \subset \ldots \subset \overset{(2)}{h}(m,n) \subset \overset{(1)}{h}(m,n). \qquad (2.4)$$

О п р е д е л е н и е. Многообразием $\overset{(p)}{H}(m,n)$, ассоциированным с многообразием $K(m,n)$, называется m-параметрическое многообразие характеристических многообразий ранга p.

О п р е д е л е н и е. Псевдофокальным многообразием ранга p многообразия $K(m,n)$ или многообразием $\overset{(p)}{f}(m,n)$ называется алгебраическое многообразие, определяемое системой уравнений:

$$F_{i_1} = 0, \ F_{i_1 i_2} = 0, \ldots, \ F_{i_1 \ldots i_p} = 0, \ a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0. \qquad (2.5)$$

Из определения многообразия $\overset{(q)}{f}(m,n)$ $(q = 1, 2, \ldots, p)$ следует что:

$$\overset{(q)}{f}(m,n) \subset \ldots \subset \overset{(2)}{f}(m,n) \subset \overset{(1)}{f}(m,n), \qquad (2.6)$$

$$\overset{(q)}{f}(m,n) \subset Q_{n-1}.$$

О п р е д е л е н и е. Многообразием $\overset{(p)}{F}(m,n)$, ассоциированным с многообразием $K(m,n)$, называется m-параметрическое многообразие псевдофокальных многообразий ранга p.

§ 3. Многообразия $T(p,n)$ и $T(p,n-1)$.

Имеем:

$$N_p = m + \frac{m(m+1)}{2!} + \ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+p-1)}{p!}.$$

О п р е д е л е н и е. Многообразием $T(p,n)$ ($T(p,n-1)$) называется многообразие $K(m,n)$, у которого $N_p = n$ $(N_p = n-1)$

У таких многообразий характеристическое (псевдофокальное) многообразие в общем случае имеет своими компонентами точки (см. [4]).

В качестве примера рассмотрим многообразие $T(2, n-1)$. Поместим вершину A_0 репера R в нульмерную компоненту его псевдофокального многообразия ранга 2. Тогда

$$a_{00} = 0, \ \Lambda_{00i} = 0, \ \Lambda_{00ij} = 0. \qquad (3.1)$$

Вершины $A_1, \ldots, A_m$ расположим в касательной m-плоскости к поверхности (A_0). Имеем:

$$\omega_0^\xi = 0, \ (\xi, \eta, \ldots = m+1, 2, \ldots, n) \qquad (3.2)$$

$$a_{0k}\omega^k = 0, \qquad (3.3)$$

$$\Lambda_{0ki}\,\omega^k = 0, \qquad (3.4)$$

(где $\omega^i = \omega_0^i$)

Принимая формы ω^i за независимые первичные формы получаем:

$$a_{0i} = 0, \qquad (3.5)$$

$$\Lambda_{ij} \equiv \Lambda_{0ij} = 0. \qquad (3.6)$$

Из (3.5) следует:

Т е о р е м а 1. Касательная плоскость к поверхности (A_0) в точке A_0 принадлежит гиперплоскости, касательной к гиперквадрике Q_{n-1} в той же точке.

Т е о р е м а 2. Касательная плоскость к псевдофокальному многообразию $\overset{(1)}{f}(m,n)$ в точке A_0 содержит касательную плоскость к поверхности (A_0) в той же точке.

Доказательство. Система уравнений, определяющая касательную плоскость к многообразию ${}^{(1)}f(m,n)$ в точке A_0, имеет вид:

$$a_{0\xi}x^{\xi}=0\,,\quad \Lambda_{0\xi i}x^{\xi}=0\,. \tag{3.7}$$

Откуда непосредственно следует утверждение теоремы 2.

Следствие. На многообразии ${}^{(1)}f(m,n)$ существует в общем случае 2^n точек B_a $(a=1,\dots,2^n)$, являющихся нульмерными компонентами многообразия ${}^{(2)}f(m,n)$, причем m-мерная поверхность (B_a) касается многообразия ${}^{(1)}f(m,n)$ в точке B_a.

§ 4. Многообразие $T(1,n-1)$.

Поместим вершину A_0 репера R в одну из нульмерных компонент его псевдофокального многообразия ранга I.

Вершины $A_1,\dots,A_{n-1}$ расположим на гиперплоскости касательной к гиперповерхности (A_0), в точке A_0, вершину A_n поместим в произвольную точку пространства P_n, не принадлежащую этой гиперплоскости.

Как и в предыдущем параграфе, примем формы $\omega_0^i=\omega^i$ за независимые первичные формы.

Система уравнений многообразия $T(1,n-1)$ запишется в виде:

$$\Theta_{\alpha\beta}=\Lambda_{\alpha\beta i}\,\omega^i\,,\quad \omega_0^n=0\,, \tag{4.1}$$

причем:

$$a_{00}=0\,,\quad \Lambda_{00i}=0 \tag{4.2}$$

Учитывая (4.2), получим:

$$a_{0i}=0\,. \tag{4.3}$$

Замыкая $\omega_0^n=0$, имеем

$$\omega_i^n=b_{ij}\,\omega^j\,. \tag{4.4}$$

Из (4.I) с учетом (4.3) находим:

$$a_{ik}\,\omega^k+a_{0n}\,b_{ik}\,\omega^k=-\Lambda_{0ik}\,\omega^k\,. \tag{4.5}$$

Теорема 3. Касательная к гиперповерхности (A_0) гиперплоскость в точке A_0 совпадает с касательной гиперплоскостью к гиперквадрике Q_{n-1} в той же точке.

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно вытекает из соотношения (4.3).

Следствие. В пространстве P_n в общем случае существует 2^n гиперповерхностей, ассоциированных с многообразием $T(1,n-1)$ и касающихся всех его гиперквадрик.

§5. Основной объект многообразия $T(1,n-1)$.

Теорема 4. Фундаментальный объект первого порядка $\Gamma_1=\{a_{\alpha\beta},\Lambda_{\alpha\beta i}\}$ является основным объектом многообразия $T(1,n-1)$.

Доказательство. Зададим для компонент объекта Γ_1 следующие начальные значения:

$$\begin{gathered}\mathring{a}_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}\,,\quad \mathring{\Lambda}_{0ij}=\delta_{ij}\,,\quad \mathring{\Lambda}_{nnj}=0\,,\\ \mathring{\Lambda}_{iij}=\delta_{ij}\,,\quad \mathring{\Lambda}_{00j}=-1\,,\quad \mathring{\Lambda}_{nij}=\delta_{ij}\,.\end{gathered} \tag{5.1}$$

$$\mathring{\Lambda}_{onj}=0,\quad \mathring{\Lambda}_{ijk}=0\quad (i\neq j). \tag{5.1}$$

Такое задание начальных значений обеспечивает выполнение тождеств (I.6). Из определения основного объекта [3] следует, что надо доказать алгебраическую разрешимость дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\delta a_{\alpha\beta} = a_{\gamma\beta}\pi^{\gamma}_{\alpha} + a_{\alpha\gamma}\pi^{\gamma}_{\beta}, \\ &\delta\Lambda_{\alpha\beta i} = \Lambda_{\gamma\beta i}\pi^{\gamma}_{\alpha} + \Lambda_{\alpha\gamma i}\pi^{\gamma}_{\beta} + \Lambda_{\alpha\beta j}\mathring{\tau}^{j}_{i} \end{aligned} \tag{5.2}$$

относительно вторичных форм π^{β}_{α}, $\mathring{\tau}^{j}_{i}$ в окрестности точки $(\mathring{a}_{\alpha\beta}, \mathring{\Lambda}_{\alpha\beta i})$.

К системе (5.2) присоединим формальную алгебраическую систему:

$$\begin{aligned} &y_{\alpha\beta} - \mathring{a}_{\gamma\beta}x^{\gamma}_{\alpha} - \mathring{a}_{\alpha\gamma}x^{\gamma}_{\beta} = 0, \\ &z_{\alpha\beta i} - \mathring{\Lambda}_{\gamma\beta i}x^{\gamma}_{\alpha} - \mathring{\Lambda}_{\alpha\gamma i}x^{\gamma}_{\beta} - \mathring{\Lambda}_{\alpha\beta j}t^{j}_{i}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Г.Ф.Лаптев установил см.(3), что из того, что формальная система (5.3) разрешима относительно величин $x^{\beta}_{\alpha}, t^{j}_{i}$, следует, что система дифференциальных уравнений (5.2) алгебраически разрешима относительно форм $\pi^{\beta}_{\alpha}, \tau^{j}_{i}$ в окрестности точки $(\mathring{a}_{\alpha\beta}, \mathring{\Lambda}_{\alpha\beta i})$.

Из (5.3) находим:

$$\begin{aligned} &x^{0}_{0} = \tfrac{1}{2}y_{00},\quad x^{i}_{i} = \tfrac{1}{2}y_{ii},\quad x^{n}_{n} = \tfrac{1}{2}y_{nn}, \\ &x^{i}_{n} = \tfrac{1}{2}z_{nni},\quad t^{i}_{j} = -z_{iij}\quad (i\neq j), \\ &x^{0}_{i} = z_{nij} - z_{oij},\quad x^{0}_{i} = y_{oi} - z_{nij} + z_{oij}, \\ &x^{0}_{n} = y_{oi} - z_{nij} + z_{oij} + \tfrac{1}{2}z_{nni} - z_{oni}, \\ &x^{n}_{0} = y_{on} - y_{oi} + z_{nij} - z_{oij} - \tfrac{1}{2}z_{nni} + z_{oni}, \\ &x^{n}_{i} = y_{in} - \tfrac{1}{2}z_{nni}, \\ &x^{j}_{i} = z_{nij} - z_{iij}\quad (i\neq j), \\ &t^{i}_{j} = \tfrac{1}{2}z_{nni} - y_{oi} + z_{nij} + z_{oij} + z_{oni}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Все величины x^{β}_{α}, t^{j}_{i} найдены. Теорема доказана.

Литература

I. Малаховский В.С., Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. "Геометрический сборник" (Труды Томского ун-та), I963, т.I68, с.28-42.

2. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей. "Геометрия. I963" (Итоги науки ВИНИТИ АН СССР) М., I965, с.5-64.

3. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. (Труды Московского матем. общества), I953, ГИТТЛ, М., 2, с.273-383.

4. Ходж В. и Пидо Д., Методы алгебраической геометрии. Т.I-2, ИЛ, М., I954.