УДК 514.75

Л. Е. Евтушик

(Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова)

УНИКАЛЬНАЯ ШКОЛА КАРТАНА — ЛАПТЕВА, ЕЕ СБЕРЕЖЕНИЕ

К 100-летию нашего учителя Г. Ф. Лаптева

Дана характеристика метода продолжений и охватов Картана — Лаптева с использованием дифференцируемых многообразий и расслоений.

Колыбелью школы стал один из крупнейших геометрических семинаров Московского университета, руководимый в 1950-е годы старейшим геометром России Сергеем Павловичем Финиковым и его учеником и последователем Германом Федоровичем Лаптевым. Сергей Павлович Фиников уже до этого был главой крупнейшей российской школы классической геометрии и заведующим кафедрой дифференциальной геометрии МГУ, где я в 1954 году стал одним из первых аспирантов Германа Федоровича. А до этого три года студентом, дипломником впитывал как губка только что обнародованные новейшие идеи и теоретические разработки уникальных методов подвижного репера, уникальных своей силой и универсальностью. Эта универсальность подходов и методов позволяла на единой основе перестроить всю разномастную на то время геометрию в стройное архитектурное сооружение. Базовые элементы этого сооружения уже были подготовлены развитием геометрии в первой половине двадцатого столетия. Вот эти положения, на которые мог опереться Лаптев:

1. Теория групп Ли — Картана, однородных пространств и пространств с псевдогруппами преобразований. И все это на основе четко сформулированного понятия гладкого многообразия.

2. Детально разработанный великим Эли Картаном аппарат внешнего дифференциального исчисления на многообразиях, органичный синтез этого исчисления с универсальной идеей метода подвижного репера и образцы его применения.

3. Построение теории римановых многообразий, их теоретико-физических и других обобщений и соответствующего этой проблематике тензорного аппарата. Становление на основе идей Картана универсального понятия расслоенного многообразия со структурной группой Ли и понятия связности на нем.

4. Выделение в отдельную категорию расслоений, естественно возникающих над каждым гладким многообразием и образующих на нем те или иные дифференциально-геометрические объекты (тензоры, дифференциальные формы, объекты связности, реперы, объекты математического анализа…) сколь угодно высокого дифференциального порядка. Внедрение современного уровня строгости на смену инфинитезимальному подходу, широкое использование в этих целях исчисления струй Эресмана и теоретико-групповых методов Картана.

В перечисленных выше главных конструктивных элементах геометрии лишь угадывается конструкция современного здания геометрии. Видно, что все эти опоры пронизаны совершенно новыми для того времени идеями Картана. Но эти идеи не были сразу признаны геометрами — современниками Картана даже у него на родине во Франции, хотя глубокие конкретные достижения Картана в геометрии однородных пространств и групп Ли были по достоинству оценены специалистами в этой области. И только Сергей Павлович Фиников, окунувшись в 1930-х годах в геометрическую среду Франции, как неформальный ученик и последователь Эли Картана, начал постепенно, уже вернувшись в Московский университет, осваивать и применять в классических разделах геометрии методы Картана, а также, что очень важно, пропагандировать их в своих замечательных монографиях.

Вот на эту-то благодатную почву упали зерна собственных идей соратника и последователя С. П. Финикова Германа Федоровича Лаптева. То, чего недоставало в методиках самого Картана (в 1951 году Картана не стало), Герман Федорович Лаптев внес в 1950 году в своей масштабной докторской диссертации [2], когда я заканчивал свой второй год учебы в Московском университете. В следующем году я начал свои первые шаги в учебной и научной работе под руководством Лаптева, сначала над дипломной работой, в которой мне надо было продолжить одну работу Картана по геометрии кратного лагранжиана (интеграла) на случай, когда интеграл зависит от частных производных выше первого порядка. Это невольно предопределило то, что в дальнейшем (в частности, и в кандидатской, и в докторской диссертациях) я включился в когорту немногих геометров, изучающих малоисследованные геометрические структуры высших порядков, где особо важную роль в методе Картана — Лаптева играют расслоения реперов высших порядков. Я и сейчас просто не представляю себе, как можно было бы преодолеть трудности в исследовании геометрии и лагранжианов, и гамильтонианов, и систем дифференциальных уравнений высших порядков, не владея методами Картана с решающими дополнениями этих методов Лаптевым. Именно благодаря методу Картана — Лаптева некоторые мои работы оказались отмеченными на конкурсах и по случаю 200-летия Н. И. Лобачевского, и по случаю 200-летия Московского университета.

В чем же уникальные преимущества метода Картана и той завершающей этот метод лепты, внесенной моим учителем Германом Федоровичем Лаптевым? Если коротко, то трудами Лаптева метод стал в самом прямом смысле оперативным и абсолютно универсальным, т. е. пригодным для описания и классификации любых дифференциально-геометрических структур (в самом общем смысле) на гладких многообразиях и в главных своих чертах завершенным, естественно встроенным в саму подлежащую изучению структуру. (Более детальную характеристику метода подвижного репера Картана — Лаптева дадим позже.) Ранее я остановился на дате 1950 года как дате оформления Лаптевым полномасштабного метода Картана — Лаптева в его первозданном, авторском виде. Вскоре появятся первые прямые ученики (себя я назвал), вносящие вместе с Лаптевым свою лепту в развитие, детализацию и приложения метода: А.М. Васильев, Ю.Г. Лумисте, М.А. Акивис, В.С. Малаховский, В.И. Близникас, В.Т. Базылев, Н.М. Остиану и др. Начинается стремительное становление школы Картана — Лаптева сначала как Московской школы (Г.Ф. Лаптев, С.П. Фиников, А.М. Васильев, Л.Е. Евтушик, М.А. Акивис, В.Т. Базылев, Н.М. Остиану). Быстро вырастают региональные базы нашей школы (Томск, Иркутск, Калининград, Тарту, Вильнюс, Смоленск, Тверь, Чебоксары, Черновцы). В результате школа Картана — Лаптева занимает лидирующие позиции на всех геометрических конференциях Советского Союза. С нашей школой соперничает только мощная геометрическая школа, базирующаяся в Академии наук. Центрами школы Картана — Лаптева изначально являются Московский университет во дворце науки на Ленинских горах (в семинаре, возглавляемом последовательно С.П. Финиковым и Г.Ф. Лаптевым, Г.Ф. Лаптевым и А.М. Васильевым, А.М. Васильевым и Л.Е. Евтушиком) и параллельно ВИНИТИ Академии наук во Всесоюзном геометрическом семинаре, получившем имя Г.Ф. Лаптева после его кончины в 1972 году. Таков был наш территориальный и кадровый потенциал до времен печально известной перестройки и распада СССР.

Каковы наши достижения, а равно и научно-организационные потери в канун 100-летия Германа Федоровича и одновременно 140-летия Э. Картана, предтечи нашей школы; и как уберечь ее от возможного саморазрушения и вырождения в научном и человеческом измерении — поговорим в заключительной части этих заметок. А сейчас — о теоретической базе нашей школы, которую в свое время Бюро геометрического семинара им. Г.Ф. Лаптева поручило мне привести к современной форме и проиллюстрировать на примере геометрии систем обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка в монографическом томе «Проблемы геометрии», № 9 (гл. I и IV) [1]. Как видим, и здесь мне пришлось иметь дело с непростой дифференциально-геометрической структурой математического анализа высшего порядка, задействовав весь арсенал нашего фирменного метода.

Все, что до сих пор изучалось или могло изучаться в дифференциальной геометрии, определяется в конечном счете с помощью понятия гладкого многообразия той или иной размерности и понятия гладкого отображения, связывающего два многообразия; и все это совершается, понятное дело, на основе многомерного дифференциального исчисления. В этом уже проявляется идеологическое единство геометрии как науки. И всякий новобранец, а тем более старожил науки геометрии, должен понимать святость названных выше ключевых понятий для геометрии или выходить из ее храма. Что же является главным объектом поклонения (исследования) в храме геометрии; можно ли это определить универсальным образом и сформулировать столь же универсальный аппарат исследования, внутренне присущий объекту исследования? Метод Картана — Лаптева дает положительный ответ, и удивительно, что это известно далеко не всем специалистам-геометрам. Ответ в нашей версии (версии школы Картана — Лаптева) состоит в формулировке универсального понятия дифференциально-геометрической структуры на гладком многообразии X как того или иного поля дифференциально-геометрического объекта заданного типа над многообразием X.

Постараемся сформулировать это в наиболее универсальной форме с указанием универсальной алгебраической модели исследования. Мы дадим единственно возможное естественное определение главного расслоенного пространства $H^p(X)$ реперов порядка p на данном (подчеркнем — совершенно произвольном) гладком многообразии X без отношения к тому, что на этом многообразии уже задана какая-либо структура. Определение будет безукоризненным, если мы воспользуемся понятием струи порядка p (p-струи) $j_x^p f$ гладкого отображения

$$f : X \to Y.$$

Струя $j_x^p f$ с началом в точке $x \in X$ и концом в точке $y = f(x) \in Y$ определяется как элемент гладкого многообразия $J^p(X,Y) \supset j_x^p f$, имеющий локальные координаты

$$j_x^p f : (x^i, y^\alpha, y_i^\alpha, y_{i_1 i_2}^\alpha, ..., y_{i_1 ... i_p}^\alpha),$$

где x^i, y^α — локальные координаты x и y, $y^\alpha = f^\alpha(x^1,...,x^n)$ — координатная запись отображения f и

$$y_i^\alpha = \partial_i f^\alpha(x),\ y_{i_1 i_2}^\alpha = \partial_{i_2} \partial_{i_1} f^\alpha(x), ..., y_{i_1 ... i_p}^\alpha = \partial_{i_p} \partial_{i_{p-1}} ... \partial_{i_1} f^\alpha(x)$$

симметричные по всем нижним индексам частные производные до порядка p включительно $(\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i})$. Для двух отображений $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ и трех точек $x \in X$, $y = f(x) \in Y$, $z = g(y) \in Z$ можно так определить произведение p-струй $j_x^p f$, $j_y^p g$:

$$j_y^p g \circ j_x^p f = j_x^p (g \circ f).$$

Для трех соответствующих струй получим ассоциативность умножения. Струя тождественного отображения действует при умножении как единичный элемент. Если взять p-струи всех локальных диффеоморфизмов $f : X \to X$, сохраняющих точку $x_0 \in X$ (стационарные в точке x_0 p-струи), то они, как легко заметить, образуют группу Ли. Обратные ее элементы — это p-струи обратных в окрестности точки x_0 диффеоморфизмов. Все такие группы порядка p для многообразий одинаковой размерности n изоморфны такой же группе Λ_n^p для $\mathbf{R}^n$ в его начале координат $o \in \mathbf{R}^n$. Сейчас мы в состоянии определить понятие репера порядка p r_x^p (p-репера) в точке $x \in X$ n-мерного многообразия X как p-струи $j_o^p \varphi$ локального диффеоморфизма $\varphi :\ \mathbf{R}^n \to X,\ x = \varphi(o)$. Следовательно, p-репер r_x^p является элементом гладкого многообразия $H^p(X)$ $(r_x^p \in H^p(X))$, локальными координатами которого может служить система величин $(x^i, x_k^i, x_{k_1 k_2}^i, \ldots, x_{k_1 k_2 \ldots k_p}^i)$, где x^i — локальные координаты точки x, x_k^i — якобиева матрица (обратимая) отображения φ в точке o, остальные координаты произвольны и симметричны по нижним индексам. Как видим, из координатной структуры вытекает последовательность проекций:

$$X \leftarrow H^1(X) \leftarrow H^2(X) \leftarrow \ldots \leftarrow H^p(X).$$

Каноническая проекция $H^p(X) \to X$ расслаивает многообразие p-реперов на слои, образованные всеми p-реперами, взятыми в одной и той же точке $x \in X$, когда x пробегает все X. И, наконец, на каждом расслоении p-реперов, базой которого является произвольное n-мерное гладкое многообразие X, действует одна и та же группа Ли Λ_n^p. Действительно, ее элемент $l_n^p = j_o^p \psi,\ \psi(o) = 0,$ а произвольный p-репер $r_x^p = j_o^p \varphi$, $\varphi(o) = x \subset X$, и поэтому определено произведение

$$j_o^p \varphi \circ j_o^p \psi = r_x^p \circ l_n^p = \tilde{r}_x^p = j_o^p(\varphi \circ \psi),$$

отражающее правое действие группы Λ_n^p на расслоении $H^p(X)$, просто транзитивное на каждом слое (после преобразования репер остается в том же слое). Таким образом, возникает главное расслоенное пространство $H^p(X)$ p-реперов многообразия X со структурной группой Λ_n^p и произвольным гладким многообразием X в качестве его базы с канонической проекцией $\pi : H^p(X) \to X$ и слоями $\pi^{-1}(x), \forall x \in X$, образованными всеми p-реперами в каждой отдельно взятой $x \in X$. Не случайно именно это расслоение названо главным, ибо, как мы увидим сейчас, на его основе с помощью всех пространств представлений группы Ли Λ_n^p можно построить все другие расслоенные над X пространства (ассоциированные с $H^p(X)$), каждое из которых несет в себе в качестве элементов дифференциально-геометрические объекты определенного типа (тензоры, объекты связности, некоторые типы струй и т.д.). Никаких других геометрических объектов, естественно связанных с многообразием, как установлено, не существует. Поэтому данные геометрические объекты, их пространства, их поля и естественные операции над ними (охваты по Лаптеву) и есть предмет геометрии гладких многообразий. Взяв конкретное многообразие F с левым действием группы $\Lambda_n^p \supset l : F \to lF$, мы получим правое действие группы Λ_n^p на $H^p(X) \times F$ по закону

$$\text{для } \forall (r_x^p, Y) \in H^p(X) \times F \text{ и } \forall l \in \Lambda_n^p :$$

$$(r_x^p, Y)\, l = (r_x^p \circ l, l^{-1} Y) \qquad (1)$$

и тогда, по общей теории расслоенных пространств, ассоциированное с $H^p(X)$ расслоение с типовым слоем F над базой X $F(H^p(X_n))$ есть фактор-многообразие от $H^p(X) \times F$ по действию Λ_n^p

$$FH^p(X) = H^p(X) \times F / \Lambda_n^p .$$

В процессе факторизации возникает гладкое отображение факторизации λ

$$H^p(X) \times F \xrightarrow{\lambda} FH^p(X) \xrightarrow{\pi_F} X$$

и каноническая проекция π_F ассоциированного расслоения $F(H^p(X_n))$ с типовым слоем F. Каждый слой $F_x = \pi_F^{-1}(x)$ расслоения $F(H^p(X_n))$ диффеоморфен типовому слою F и получается при отображении λ из соответствующего слоя $\pi^{-1}(x) \subset H^p(X)$, умноженного на F: $\pi_F^{-1}(x) = \lambda(\pi^{-1}(x) \times F)$. Если $Y \in F$, $r_x^p \in \pi^{-1}(x) \subset H^p(X)$, то при отображении λ образом пары (r_x^p, Y) будет элемент $y_x \in \pi_F^{-1}(x) \subset$ $\subset F(H^p(X))$ из слоя $F_x \subset F(H^p(X))$ ассоциированного расслоения:

$$y_x = \lambda(r_x^p, Y).$$

Для любого элемента $l \in \Lambda_n^p$ в силу (1) имеет место тождество $\lambda(r_x^p l, Y) = \lambda(r_x^p, lY)$, что делает уместным следующую мультипликативную запись отображения λ: $\lambda(r_x^p, Y) = r_x^p \circ Y$. Эта формула, т. е. $y_x = r_x^p Y$, со свойством $(r_x^p\, l) \circ (l^{-1} Y)$ имеет важный идейный смысл, в ней, по сути, уже воплощена картановская идея (в лаптевской универсальной трактовке) подвижного репера в самой универсальной форме, применительно к изучению любых дифференциально-геометрических структур на гладком многообразии. Что такое дифференциально-геометрическая структура на гладком многообразии X, мы вскоре сформулируем в максимально общем виде. Но сначала отметим второй важный и даже решающий элемент вклада Лаптева в картановскую идеологию. Множество всех расслоений, ассоциированных с главным расслоением p-реперов, $H^p(X)$, из аморфного Лаптев превращает в стройную категорию $K(H^p(X))$ многообразий, морфизмами в которой являются послойные отображения одного расслоения на другое, инвариантные в определенном смысле относительно группы Λ_n^p. А именно: если имеются два ассоциированных расслоения $F(H^p(X))$ и $\tilde{F}(H^p(X))$ с типовыми слоями F и $\tilde{F}$ (в которых по определению действует левым образом группа Λ_n^p) и гладкое отображение Φ_0 из F на $\tilde{F}$, которое коммутирует с действием на F и $\tilde{F}$ группы Λ_n^p: $\Phi_0(pY) = p\Phi_0(Y)$, отображение Φ_0 названо Лаптевым охватом, то однозначно индуцируется послойное гладкое отображение Ф:

$$\Phi : F(H^p(X_n)) \to \tilde{F}(H^p(X_n)),$$

которое слой F_x отображает на слой $\tilde{F}_x = \Phi(F_x)$. Отображение Ф есть охват расслоением $F(H^p(X))$ расслоения $\tilde{F}(H^p(X))$. Множество всех расслоений, ассоциированных с главным расслоением $H^P(X)$ вместе с отображениями охвата Ф (морфизмами), составляет категорию $K[H^P(X)]$. Можно показать, что $H^P(X_n)$ входит в эту категорию как расслоение с типовым слоем Λ_n^p, а формула $y_x = r_x^p Y$ есть формула охвата:

$$H^p(X) \times F \to F(H^p(X)).$$

Назовем его типовым охватом и отметим, что эта формула имеет смысл, вполне аналогичный случаю, когда $p = 1$ и репер r_x^1 — это подвижной базис $\underset{x}{\vec{e}}_i$ касательного расслоения $T(X)$, представленного как ассоциированное расслоение $T(X_n) = \mathbf{R}^n(H^1(X))$. В этом случае $\vec{Y} = Y^i \vec{E}_i \in \mathbf{R}^n$, $\vec{y}_x = r_x^1 \vec{Y} = \; = Y^i \underset{x}{\vec{e}}_i \in T_x(X)$, т.е. координаты элемента типового слоя (вектора $\vec{Y}$) играют роль координат вектора $\vec{y}_x$ касательного расслоения по отношению к подвижному реперу $\underset{x}{\vec{e}}_i$ первого порядка.

Итак, мы на основе произвольного гладкого многообразия однозначно определили категорию $K[H^P(X)]$ расслоений различных дифференциально-геометрических объектов с морфизмами-охватами. Композиция двух последовательных охватов является охватом. Наиболее распространенным объектом исследования на многообразии X являются поля дифференциально-геометрических объектов того или иного ассоциированного расслоения $X \xleftarrow{\pi_F} F(H^p(X))$, т.е. сечения расслоения $F(H^p(X))$ над базой X:

$$s : X \to F(H^p(X)),\ \pi \circ s = id : X \to X.$$

Каждое такое сечение определяет на X дифференциально-геометрическую структуру типа F. Однако вполне оправдано естественное обобщение понятия дифференциально-геометрической структуры. В случае, когда имеется охват Ф:

$$X \xleftarrow{\pi_F} F(H^p(X)) \xleftarrow{\Phi} \tilde{F}(H^p(X)),$$

расслоение $F(H^p(X))$ является базой более дробного расслоения $\tilde{F}(H^p(X))$ относительно проекции Ф на $F(H^p(X))$. Может возникнуть необходимость исследовать сечения такого типа:

$$s : F(H^p(X)) \to \tilde{F}(H^p(X)).$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений $\dfrac{d^p x}{dt} = f(x, \dfrac{dx}{dt}, ..., \dfrac{d^{p-1}x}{dt})$ р-го порядка на X — именно такого рода структура на X, в которой задействованы расслоения р-скоростей $T^p(X) \to T^{p-1}(X) \to ... \to T(X) \to X$.

И, наконец, в заключительном и решающем этапе метода Лаптева каждому расслоению дифференциально-геометрических объектов из категории $K[H^P(X)]$ сопоставляется система линейных дифференциальных форм — структурных форм, в терминах которых описываются эти расслоения, формулируется критерий охвата, записываются и исследуются структурные уравнения заданной структуры на многообразии.

Начинать надо с главных расслоений реперов $H^1(X)$, $H^2(X),...,H^p(X),...$ с локальными координатами $(x^i, x^i_k, x^i_{k_1k_2},...,x^i_{k_1...k_p})$ репера r^p_x с симметричными по $k_1,...,k_p$.

Если обозначим $\underset{x}{\vec{\varepsilon}}_i = \dfrac{\vec{\partial}}{\partial x^i}$ векторы натурального репера первого порядка в точке $x(x^i) \in X$, а $\underset{x}{\vec{e}}_i = x^k_i \underset{x}{\vec{\varepsilon}}_i \in T_x(X)$ подвижной репер, то касательный вектор $\overrightarrow{dx} \in T_x(X)$ запишем так:

$$\overrightarrow{dx} = dx^i \underset{x}{\vec{\varepsilon}}_i = \overset{*}{x}{}^k_i \, d\, x^i \underset{x}{\vec{e}}_k = \omega^k \underset{x}{\vec{e}}_k \, . \qquad (2)$$

Дифференциальные формы $\omega^k = \overset{*}{x}{}^k_i \, dx^i$, как видно из их координатной записи, определены на расслоении $H^1(X)$. Внешнее дифференцирование форм ω^k дает

$$d\omega^k = \omega^l \wedge \omega^k_l, \;\; \omega^k_l = \overset{*}{x}{}^k_i (dx^i_l - x^i_{lm}\omega^m),$$

причем формы ω^k, ω^k_l определены на расслоении 2-реперов $H^2(X)$, а внешнее дифференцирование форм ω^k_l дает

$$d\omega^k_l = \omega^m_l \wedge \omega^k_m + \omega^m \wedge \omega^k_{lm},$$

$$\omega^k_{lm} = \overset{*}{x}{}^k_i (dx^i_{lm} - x^i_{lj}\omega^j_m - x^i_{mj}\omega^j_l - x^i_{lmj}\omega^j),$$

где $\omega^k_{lm} = \omega^k_{ml}$, и этот регулярный и однозначный процесс дает всю последовательность

$$\omega^i, \omega^i_k, \omega^i_{k_1 k_2}, ..., \omega^i_{k_1 ... k_p}, ...$$

симметричных по нижним индексам структурных форм расслоения $H^{p+1}(X)$.

Координатная запись этих форм необязательна, а вот их структурные уравнения и есть основной дифференциально-алгебраический аппарат нашего метода:

$$d\omega^i = \omega^k \wedge \omega^i_k,\ d\omega^i_k = \omega^l_k \wedge \omega^i_l + \omega^l \wedge \omega^i_{kl}, ...,$$

$$d\omega^i_{k_1 k_2 ... k_p} = \sum_{s=1}^{p} \frac{1}{s!(p-s)!} \omega^l_{(k_1 ... k_s} \wedge \omega^i_{k_{s+1} ... k_p)l} + \omega^l \wedge \omega^i_{k_1 k_2 ... k_p l}.$$

Сделаем ряд важных замечаний, прежде чем завершить наше краткое описание основных положений метода Картана — Лаптева

1. Формула

$$\vec{dx} = \omega^i \underset{x}{\vec{e}_i} \in T(X) \qquad (3)$$

есть не более и не менее, чем запись произвольного касательного к многообразию X в точке $x \in X$ вектора $\vec{dx} = dx^i \underset{x^i}{\vec{\varepsilon}} \in T(X)$ $\left(\underset{x^i}{\vec{\varepsilon}} = \frac{\vec{\partial}}{\partial x^i}\right)$ относительно подвижного репера $\underset{x^i}{\vec{e}} = x^k_i \underset{x^k}{\vec{\varepsilon}}$, что и определило координатную запись глобально существующих на $H^1(X)$ дифференциальных форм $\omega^i = \overset{*}{x}{}^i_k\, dx^k$, благодаря чему, в свою очередь, мы однозначно получаем всю бесконечную последовательность глобально определенных и симметричных по нижним индексам структурных форм $\omega^i, \omega^i_k, \omega^i_{k_1 k_2}, ..., \omega^i_{k_1 ... k_p}, ...$ последовательности расслоений реперов различных порядков $X \leftarrow H^1(X) \leftarrow H^2(X) \leftarrow ...$.

2. Грамотный человек, имеющий отношение к геометрии по выбору своей математической специализации, увидит разницу формулы (3) с похожей формулой в R^n (аффинном пространстве с точками $x \in R^n$ и их радиус-векторами $\vec{x} = \overrightarrow{Ox}$

$$d\vec{x} = \omega^i \underset{x}{\vec{e}_i},$$

где $\vec{e}^{\,i}_x$ — тоже подвижной репер $x^k_i \underset{x}{\vec{\partial}_k} = \underset{x}{\vec{e}}$). Разница в том, что мы имеем право дифференцировать радиус-вектор $\vec{x}$ точки x и поэтому пишем $d\vec{x}$ (а не $\overrightarrow{dx}$), где символ d имеет строго обусловленный нами смысл как дифференциал радиус-вектора $\vec{x} = (x^1, x^2, ..., x^n)$ — функции своих координат в аффинном пространстве, где есть параллельный перенос. Поэтому в случае аффинного пространства формулу

$$d\vec{x} = \omega^i \underset{x}{\vec{e}_i}, \text{ где } \underset{x}{\vec{e}_i} = x^k_i \, \vec{\partial}_k, \tag{4}$$

мы вправе продифференцировать внешним образом (предварительно выведя из (4), что $d\underset{x}{\vec{e}_i} = \omega^k_i \underset{x}{\vec{e}_k}$, $\omega^i_k = \overset{*}{x}{}^i_l \, dx^l_k$) и получить

$$\vec{0} = (d\omega^i - \omega^k \wedge \omega^i_k)\underset{x}{\vec{e}_i} \Rightarrow d\omega^i = \omega^k \wedge \omega^i_k.$$

Тогда как формулу (4) для многообразия X, не имеющего структуру аффинного пространства, у нас нет никаких оснований каким-либо образом дифференцировать. Между тем кое-кто из дипломированных «специалистов», имеющих отношение к методу Картана, это делает (Ю. И. Шевченко [3, с. 20, форм. (5)]). Те «формулы», которые автор там получает, в буквальном смысле «формально» могут иметь отношение к R^n, если произвести соответствующие операции по отношению к точкам $x = (x^1, x^2, ..., x^n) \in R$ и сделать это в строго координатном виде, или к X, но только в фиксированной координатной карте $X \supset U \xrightarrow{\varphi} R^n$. А ведь в данном примере речь идет лишь о самом начале процитированного 80-страничного учебного пособия [3]. Чему может научить такое пособие студента, а тем более аспиранта? И неудивительно, как мы в дальнейшем увидим, что автор пришел к понятию неголономного многообразия, на котором, как на особом новшестве, базируется весь материал пособия.

Мы должны вернуться к последнему из важнейших шагов в построении метода Картана — Лаптева: оснащению структурными дифференциальными формами всех расслоений, ассоциированных с главными расслоениями реперов $H^p(X)$ различных порядков p.

Пусть F произвольное пространство представления группы Λ_n^p как группы преобразований:

$$l_n^p : F \to l_n^p \cdot F \ \text{ или } \ F \supset Y \overset{l_n^p}{\mapsto} \tilde{Y} = l_n^p \cdot Y \in F.$$

Предположив для простоты, что многообразие F устроено, как R^N в координатном смысле, и $(Y^1, ..., Y^N) = (Y^I)$ есть координаты элемента $Y \in F$, мы запишем в координатах Y^I и координатах $(l_k^i, l_{k_1 k_2}^i, ..., l_{k_1 \dots k_p}^i)$ элемента $l_n^p \in \Lambda_n^p$ формулы преобразования координат элемента Y в координаты элемента $\tilde{Y}$ $\tilde{Y}^I$:

$$\tilde{Y}^I = \Phi^I (l_k^i, l_{k_1 k_2}^i, ..., l_{k_1 \dots k_p}^i; Y^K). \qquad (5)$$

Тогда из определяющего свойства типового охвата

$$\Phi : H^p(X) \times F \to FH^p(X) \ \text{ или } \ \Phi : (r_x^p, Y) \to \Phi(r_x^p, Y) = r_x^p \cdot Y,$$

а именно $(r_x^p l) \cdot Y = r_x^p \cdot (lY)$, следует, что координатная запись отображения Ф, дающего элемент $y_x \in F_x \subset F(H^p(X))$

слоя $F_x,\ x \in X$ с координатами (x^i, y^I) как функцию координат р-репера $r_x^p\ (x^i, x_k^i, x_{k_1k_2}^i, ..., x_{k_1...k_p}^i)$ и координат Y^I элемента $Y \in F$, может быть выражена формулами (5):

$$y^I = \Phi_0^I(x_k^i, x_{k_1k_2}^i, ..., x_{k_1...k_p}^i; Y^K) \tag{6}$$

Так как репер r_x^p есть р-струя локального диффеоморфизма $\varphi : R^n \to X\ j_o^p\varphi$, то существует обратная к $j_o^p\varphi$ р-струя — как струя отображения $\varphi^{-1} : x \mapsto 0 \in R$, т.е. $j_x^p\varphi^{-1}$, обозначаемая как $\overset{*}{r}{}_x^p$ (корепер репера r_x^p) с координатами $(x^i, \overset{*}{x}{}_k^i,$ $\overset{*}{x}{}_{k_1k_2}^i, ..., \overset{*}{x}{}_{k_1...k_p}^i)$, определяемыми из условия

$$\overset{*}{r}{}_x^p \cdot r_x^p = \delta^p,\ \delta^p \text{- единица группы } \Lambda_n^p.$$

Отсюда следует обратное (6) преобразование:

$$Y^I = \Phi_0^I(\overset{*}{x}{}_k^i, \overset{*}{x}{}_{k_1k_2}^i, ..., \overset{*}{x}{}_{k_1...k_p}^i; y^I).$$

Произвольная фиксация точки $(x^i, y^K) = y_x \in F(H^p(X))$ по теории представлений приведет к системе уравнений Пфаффа следующего вида:

$$\omega^i = 0,\ dY^I + F^{Il_1}_{\ \ k}(Y^K)\overline{\omega}_{l_1}^k + ... + F^{Il_1...l_p}_{\ \ k}(Y^K)\overline{\omega}_{l_1...l_p}^k = 0,$$

где $\overline{\omega}_{k_1...k_s}^i = \omega_{k_1...k_s}^i \big|_{\omega^i=0}$. Это означает, что система линейных дифференциальных форм

$$\omega^i, \Delta Y^I \equiv dY^I + F^{Ip}_{\ \ \alpha}(Y)\omega_p^\alpha,\ \text{где } \omega_p^\alpha = (\omega_l^k, \omega_{l_1l_2}^k, ..., \omega_{l_1...l_p}^k)$$

является вполне интегрируемой, а ее первыми интегралами служат локальные координаты (x^i, y^K) элемента $y_x \in F_x \subset$

$\subset F(H^p(X))$ ассоциированного расслоения $F(H^p(X)) =$ $= H^p(X) \times F / \Lambda_n^p$ с типовым слоем F. Пфаффовы формы $\omega^i, \Delta Y^K = dY^K + F^{Kp}_{\alpha}(Y)\omega_p^{\alpha}$ называем структурными формами расслоения $F(H^p(X)) \to X$.

Подчеркнем, что и структурные формы главных расслоений реперов $H^p(X)$ $(\omega^i, \omega_k^i, \omega_{kl}^i, ...)$, и структурные формы ассоциированных с ними расслоений $F(H^p(X))$ дифференциально-геометрических объектов $(\omega^i, \Delta Y^I = dY^I + F^I(Y)^p_{\alpha}\omega_p^{\alpha})$ являются адекватными дифференциально-алгебраическими моделями своих расслоений. И вполне естественно, что главнейшая операция в геометрии — охват (морфизм расслоений) — имеет в терминах структурных форм, связанных охватом Ф двух расслоений

$$\Phi : F(H^p(X)) \to \tilde{F}(H^p(X)),$$

следующий критерий.

Отображение Ф является охватом, если и только если порождающее его отображение типовых слоев

$$\Phi : F \to \tilde{F} \text{ (или, в координатах } \tilde{Y}^a = \Phi_o^a(Y^I))$$

связывает их соответствующие структурные формы

$$\omega^i, \Delta Y^I = dY^I + F^I(Y)^p_{\alpha}\omega_p^{\alpha} \text{ и } \omega^i, \Delta\tilde{Y}^a = d\tilde{Y}^a + \tilde{F}^a(\tilde{Y})^p_{\alpha}\omega_p^{\alpha}$$

следующим образом:

$$\Delta\tilde{Y}^a \circ d\Phi = \frac{\partial\Phi_o^a(Y)}{\partial Y^I}\Delta Y^I.$$

Нередко бывает, что Φ_o сводится к проектированию $\tilde{Y}^a = Y^a$, когда из структурных форм ΔY^I выделяется часть ΔY^a, содержащая только координаты Y^a:

$$\Delta Y^a = dY^a + \Phi^{a\,p}_{\alpha}(Y^a)\omega^{\alpha}_{p}.$$

Тогда система $\omega^i, \Delta Y^a$ будет автоматически вполне интегрируемой системой структурных форм расслоения $\tilde{F}(H^p(X))$, образованного подобъектами дифференциально-геометрических объектов расслоения $F(H^p(X_n))$. На самом деле заменой координат Y^I в типовом слое F отображение $\Phi_o : F \to \tilde{F}$ в общем случае сводится к указанному проектированию.

Имея, таким образом, пару ассоциированных расслоений $F(H^p(X))$ и охваченное им расслоение $\tilde{F}(H^p(X))$, мы определяем дифференциально-геометрическую структуру типа $(F, \tilde{F})$ на многообразии X как сечение

$$S : \tilde{F}(H^p(X)) \to F(H^p(X)) \quad \Phi \circ S = id$$

расслоения $\Phi : F(H^p(X)) \to \tilde{F}(H^p(X))$ над базой $\tilde{F}(H^p(X))$ этого расслоения. Тогда на секущей поверхности

$$S(\tilde{F}(H^p(X))) \subset F(H^p(X))$$

среди структурных форм $\Delta Y^I(\Delta Y^{\hat{I}}, \Delta Y^a)$ расслоения $F(H^p(X))$ их вполне интегрируемая часть ΔY^a останется независимой вместе с ω^i, а оставшаяся часть форм $\Delta Y^{\hat{I}}$ станет зависимой от указанных выше структурных форм базисного расслоения $\tilde{F}(H^p(X))$:

$$\Delta Y^{\hat{I}} = Y^{\hat{I}}_a \Delta Y^a + Y^{\hat{I}}_i \omega^i. \qquad (7)$$

Это и есть исходные структурные уравнения дифференциально-геометрической структуры типа $(F, \tilde{F})$, т.е. отправная точка для приложения к (7) лаптевского метода продолжений и охватов. А именно: внешнее дифференцирование уравнений (7) и применение леммы Картана дает структурные уравнения продолженного геометрического объекта $(Y^{\tilde{I}}, Y_a^{\tilde{I}}, Y_i^{\tilde{I}})$ (1-струя сечения s), по указанному критерию строятся возможные охваты продолженным объектом. Число дальнейших продолжений и охватов определяется поставленной задачей. Попутно в случае необходимости включается известная процедура канонизации реперов, упрощающая структурные уравнения за счет сужения расслоения реперов.

Итак, нами дано единственно возможное естественное обобщение понятия геометрической структуры типа $(F, \tilde{F})$ на гладком многообразии и дан универсальный дифференциально-алгебраический аппарат их исследования в терминах структурных форм и структурных уравнений.

Работа выполнена при поддержке гранта Минобразования РФ №РНП 2.1.1.7988.

Список литературы

1. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5—247.

2. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. о-ва. М., 1953. Т. 2. С. 275—382.

3. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

L. Evtushik

UNIQUE SCHOOL OF CARTAN — LAPTEV, ITS SAVINGS

The characteristic of method of continuations and clothings of Cartan — Laptev with using of differentiable manifolds and bundles is given.